Научный форум молодых исследователей «Шаг в будущее»

Решение симметрических уравнений высших степеней на множестве комплексных чисел

Автор:
Белозеров Глеб Владимирович,
МАОУ Юргинская средняя общеобразовательная школа
11а класс

Научный руководитель:
Белозеров Владимир Иванович,
учитель математики,
МАОУ Юргинская средняя общеобразовательная школа

Российская Федерация, с.Юргинское
2015 г.

Содержание

Решение симметрических уравнений высших степеней на множестве комплексных чисел

Белозеров Глеб

Российская Федерация, с.Юргинское
МАОУ «Юргинская средняя общеобразовательная школа», 11 класс

АННОТАЦИЯ

В предыдущих работах нами были рассмотрены решения симметрических уравнений 2-й – 5-й степеней на множестве действительных чисел, а также определена связь между количеством решений симметрических уравнений 3-й, 4-й, 5-й степени на множестве действительных чисел и соотношением между параметрами, выраженным графическим способом.

В данной работе мы поставили следующую цель: нахождение решений симметрических уравнений 2-й-9-й степени на множестве комплексных чисел.

В ходе выполнения работы были получены результаты:

- найдены аналитические решения симметрических уравнений 4-ой – 7-ой степени на множестве комплексных чисел;
- установлена связь между видами корней симметрического уравнения 4-й степени на множестве комплексных чисел и соотношением между параметрами уравнения, выраженным графическим способом;
- составлены программы на языке Pascal для решения симметрических уравнений 2-й –4-й, 6-й степени на множестве комплексных чисел;
- выполнен анализ вида корней вспомогательного уравнения, используемого при решении симметрического уравнения 6-й степени;
- доказано, что с помощью приёмов, используемых в работе, невозможно решить уравнение, степень которого превосходит 9-ю;
- составлен сборник заданий, содержащих симметрические уравнения 4-й-6-й степени с элементарными функциями.

Для того, чтобы полностью достичь поставленной цели, необходимо:

найти аналитические решения симметрических уравнений 8-ой – 9-ой степени на множестве комплексных чисел;

составить программы на языке Pascal для решения симметрических уравнений 8-ой – 9-ой степени на множестве комплексных чисел.

Решение симметрических уравнений высших степеней на множестве комплексных чисел

Белозеров Глеб

Российская Федерация, с.Юргинское
МАОУ Юргинская средняя общеобразовательная школа, 11 класс

ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЙ

При решении симметрических уравнений на множестве действительных чисел перед нами встал вопрос: какова наибольшая степень симметрического уравнения, которое возможно решить с помощью приёмов, используемых в работе, не только на множестве действительных чисел, но и на других множествах?

Гипотеза:

Используя теоретические знания и практические навыки, на множестве комплексных чисел можно решить любое симметрическое уравнение, степень которого не превосходит 9-ую.

Для того чтобы доказать гипотезу, нам необходимо решить следующие задачи:

- Изучить теорию комплексных чисел.
- Изучить теорию решения уравнений 3-й, 4-й степени на множестве комплексных чисел.
- Найти аналитические решения симметрических уравнений 4-й – 9-й степени на множестве комплексных чисел.
- Составить программы на языке Pascal для решения симметрических уравнений 2-й – 9-й степени на множестве комплексных чисел.
- Составить подборку заданий, содержащих симметрические уравнения с элементарными функциями.

Решение симметрических уравнений высших степеней на множестве комплексных чисел

Белозеров Глеб

Российская Федерация, с.Юргинское
МАОУ Юргинская средняя общеобразовательная школа, 11 класс

1. Аналитическое решение уравнения 4-й степени на множестве комплексных чисел

При решении симметрических уравнений используются приёмы, описанные в источнике [1,стр.15-17]. В данном источнике описаны приёмы для решения симметрических уравнений 3-й и 4-й степени на множестве действительных чисел. Но эти приёмы можно использовать и для решения симметрических уравнений, степень которых превосходит 4-ю (см. источник [2]). Рассмотрим симметрическое уравнение 4-й степени.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad \div x^2 \neq 0$$

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + a(x + \frac{1}{x}) + b = 0$$

Замена: $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$: получим уравнение $t^2 + at + b - 2 = 0$. Вычислим дискриминант $D_1 = a^2 - 4b + 8$.

Возможны случаи: 1-й случай: при $D_1 \geq 0$ имеем корни $t_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b+8}}{2}$. 2-й случай: при $D_1 < 0$ имеем корни $t_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{4b-a^2-8}}{2}$

Вернёмся к замене:1-й случай: при $D_1 \geq 0$ а) $x + \frac{1}{x} = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b+8}}{2}$

$$2x^2 + \left(-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8}\right)x + 2 = 0$$
$$D_2 = 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - 4b + 8} - 4b - 8$$

Если $D_2 \geq 0$, то: $x_{1,2} = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b+8} \pm \sqrt{2a^2-2a\sqrt{a^2-4b+8}-4b-8}}{4}$

Если $D_2 < 0$, то получаем два комплексных корня, содержащих мнимую часть: $x_{1,2} = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b+8} \pm i\sqrt{\left|2a^2-2a\sqrt{a^2-4b+8}-4b-8\right|}}{4}$. В дальнейшем комплексные корни, содержащие мнимую часть для краткости будем называть комплексными корнями, а комплексные корни, не содержащие мнимой части – действительными корнями.

$$б)x + \frac{1}{x} = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2}$$

$$2x^2 + \left(a + \sqrt{a^2 - 4b + 8}\right)x + 2 = 0$$

$$D_3 = 2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 4b + 8} - 4b - 8$$

Если $D_3 \geq 0$, то:$x_{3,4} = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b+8}\pm\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-4b+8}-4b-8}}{4}$

Если $D_3 < 0$, то получаем два комплексных корня: $x_{3,4} = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b+8}\pm i\sqrt{\left|2a^2+2a\sqrt{a^2-4b+8}-4b-8\right|}}{4}$

2-й случай: при $D_1 < 0$ *а)* $x + \frac{1}{x} = \frac{-a+i\sqrt{4b-a^2-8}}{2}$

$$2x^2 + \left(-a + i\sqrt{a^2 - 4b + 8}\right)x + 2 = 0$$

$$D_2 = 2a^2 - 4b - 8 - 2ai\sqrt{4b - a^2 - 8}$$

Пусть $k = 2a^2 - 4b - 8, m = -2a\sqrt{4b - a^2 - 8}$*, тогда :*

$$D_2 = k + mi = \sqrt{k^2 + m^2}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} + i\frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}}\right)$$

$$D_2 = \sqrt{k^2 + m^2}(cos\varphi + i\, sin\varphi)$$

Значит:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt[4]{k^2 + m^2}cos\frac{\varphi}{2}}{4} + i\frac{\sqrt[4]{k^2 + m^2}sin\frac{\varphi}{2} + \sqrt{4b - a^2 - 8}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt[4]{k^2 + m^2}cos\frac{\varphi}{2}}{4} - i\frac{\sqrt[4]{k^2 + m^2}sin\frac{\varphi}{2} - \sqrt{4b - a^2 - 8}}{4}$$

б) $x + \frac{1}{x} = \frac{-a - i\sqrt{4b - a^2 - 8}}{2}$

$$2x^2 + \left(a + i\sqrt{a^2 - 4b + 8}\right)x + 2 = 0$$

$$D_3 = 2a^2 - 4b - 8 + 2ai\sqrt{4b - a^2 - 8}$$

б) Пусть $k = 2a^2 - 4b - 8, m = -2a\sqrt{4b - a^2 - 8}$*, тогда :*

$$D_3 = k - mi = \sqrt{k^2 + m^2}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} - i\frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}}\right)$$

$$\varphi = \arcsin(\frac{m}{\sqrt{k^2+m^2}})$$

$$D_2 = \sqrt{k^2+m^2}(cos\varphi - i\ sin\varphi)$$

Значит:

$$x_3 = \frac{-a + \sqrt[4]{k^2+m^2}cos\frac{\varphi}{2}}{4} - i\frac{\sqrt[4]{k^2+m^2}sin\frac{\varphi}{2} + \sqrt{4b-a^2-8}}{4}$$

$$x_4 = \frac{-a - \sqrt[4]{k^2+m^2}cos\frac{\varphi}{2}}{4} + i\frac{\sqrt[4]{k^2+m^2}sin\frac{\varphi}{2} - \sqrt{4b-a^2-8}}{4}$$

При работе с комплексными корнями использован теоретический материал из источников [3,стр. 515-521], [4, стр.379-405], [5].

2. Связь между видами корней симметрического уравнения 4-й степени и соотношением между параметрами уравнения, выраженным графическим способом.

В источнике [6] рассмотрена связь между решениями симметрического уравнения 4-й степени на множестве действительных чисел и соотношением между параметрами уравнения, выраженным графическим способом. Сейчас данную связь на множестве комплексных чисел можно рассмотреть более детально.

При выполнении условий $\begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 > 0, \\ D_3 > 0, \end{cases}$ уравнение имеет 4 различных действительных корня, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 1 (см. рисунок1 из приложения1).

При выполнении условий $\begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 < 0, \\ D_3 < 0, \end{cases}$ уравнение имеет 4 различных комплексных корня, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 2.

При выполнении условий $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 > 0, \\ D_3 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 < 0, \\ D_3 > 0, \end{cases} \end{array}\right.$ уравнение имеет 2 различных действительных корня и 2 различных комплексных корня, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 3.

Если $D_1 = 0,$ то $D_2 = D_3$. При выполнении условий $\begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = 0, \end{cases}$ уравнение имеет 1 действительный корень, кратность которого равна 4, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 4.

При выполнении условий $\begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 > 0, \\ D_3 > 0, \end{cases}$ уравнение имеет 2 различных действительных корня, кратность которых равна 2, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 5.

При выполнении условий $\begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 < 0, \\ D_3 < 0, \end{cases}$ уравнение имеет 2 различных комплексных корня, кратность которых равна 2, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 6.

При выполнении условий $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 = 0, \\ D_3 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 > 0, \\ D_3 = 0, \end{cases} \end{array} \right.$ уравнение имеет 3 действительных корня, кратность одного из них равна 2, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 7.

При выполнении условий $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 < 0, \\ D_3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 = 0, \\ D_3 < 0, \end{cases} \end{array} \right.$ уравнение имеет 1 действительный корень, кратность которого равна 2, и 2 различных комплексных корня, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 8.

При выполнении условий $\begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = 0, \end{cases}$ уравнение имеет 2 противоположных действительных корня, кратность которых равна 2, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 9.

При выполнении условия $D_1 < 0$ уравнение имеет 4 различных комплексных корня, что возможно при значениях параметров, соответствующих выделенной области 10.

3. Аналитическое решение уравнения 6-й степени на множестве комплексных чисел

Рассмотрим симметрическое уравнение 6-й степени и разделим его на $x^3 \neq 0$.

$$x^6+ax^5+bx^4+cx^3+bx^2+ax+1=0 \quad \div x^3 \neq 0$$

$$x^3+ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$$

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+a(x^2+\frac{1}{x^2})+b(x+\frac{1}{x})+c=0$$

<u>*Замена:*</u> $x+\frac{1}{x}=t$, *тогда* $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$,*а* $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$

Получим уравнение 3-й степени $t^3+at^2+(b-3)t+(c-2a)=0$

Решим это уравнение с помощью формулы Кардано (источники [5],[7])

$$p=\frac{3(b-3)-a^2}{3}$$

$$q=\frac{2a^3-9a(b-3)+27(c-2a)}{27}$$

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Возможны случаи:

А) $Q \leq 0$	*Б)*$Q>0$
$\sigma=\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$ $\gamma=\arccos\left(-\frac{q}{2\sigma}\right)$ $t_1=2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)-\frac{a}{3}$ $t_2=2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}$ $t_3=2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}$	$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}$ $\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}$ $t_1=\alpha+\beta$ $t_{2,3}=-\frac{\alpha+\beta}{2}\pm i\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{3}$

Вернёмся к замене:

А)

	x
$t_1^2 \geq 4$	$x_1=\frac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)-\frac{a}{3}+\sqrt{\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2-4}}{2}$

	$x_2=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)-\frac{a}{3}-\sqrt{\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2-4}}{2}$
$t_1^2<4$	$x_1=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)-\frac{a}{3}+i\sqrt{4-\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2}}{2}$ $x_2=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)-\frac{a}{3}-i\sqrt{4-\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2}}{2}$
$t_2^2\geq 4$	$x_3=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}+\sqrt{\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2-4}}{2}$ $x_4=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}-\sqrt{\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2-4}}{2}$
$t_2^2<4$	$x_3=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}+i\sqrt{4-\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2}}{2}$ $x_4=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}-i\sqrt{4-\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2}}{2}$
$t_3^2\geq 4$	$x_5=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}+\sqrt{\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2-4}}{2}$ $x_6=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}-\sqrt{\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2-4}}{2}$
$t_3^2<4$	$x_5=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}+i\sqrt{4-\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2}}{2}$ $x_6=\dfrac{2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}-i\sqrt{4-\left(2\sqrt[3]{\sigma}cos\left(\frac{\gamma}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}\right)^2}}{2}$

Б)

	x
$t_1^2\geq 4$	$x_1=\dfrac{\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4}}{2}$ $x_2=\dfrac{\alpha+\beta-\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4}}{2}$
$t_1^2<4$	$x_1=\dfrac{\alpha+\beta+i\sqrt{4-(\alpha+\beta)^2}}{2}$ $x_2=\dfrac{\alpha+\beta-i\sqrt{4-(\alpha+\beta)^2}}{2}$
t_2	$m=-4-\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2}$

	$n = -\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}\sqrt{3}$ $\varphi = arcsin\left(\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)$ $x_3 = \frac{-\frac{\alpha+\beta}{2} + \sqrt{m^2+n^2}cos\frac{\varphi}{2}}{2} + i\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{3} + \sqrt{m^2+n^2}sin\frac{\varphi}{2}}{2}$ $x_4 = \frac{-\frac{\alpha+\beta}{2} - \sqrt{m^2+n^2}cos\frac{\varphi}{2}}{2} + i\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{3} - \sqrt{m^2+n^2}sin\frac{\varphi}{2}}{2}$
t_3	$m = -4 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{2}$ $n = -\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}\sqrt{3}$ $\varphi = arcsin\left(\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)$ $x_5 = \frac{-\frac{\alpha+\beta}{2} + \sqrt{m^2+n^2}cos\frac{\varphi}{2}}{2} - i\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{3} + \sqrt{m^2+n^2}sin\frac{\varphi}{2}}{2}$ $x_6 = \frac{-\frac{\alpha+\beta}{2} - \sqrt{m^2+n^2}cos\frac{\varphi}{2}}{2} - i\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{3} - \sqrt{m^2+n^2}sin\frac{\varphi}{2}}{2}$

4. Анализ вида корней вспомогательного уравнения при решении симметрического уравнения 6-й степени

При решении симметрического уравнения 6-й степени после введения замены $t = x + \frac{1}{x}$ получаем уравнение $t^3 + \ at^2 + (b-3)t + c - 2a = 0 (1)$. Сведя его к уравнению вида $y^3 + py + q = 0$ (2), вычислим значение величины $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 (3)$, где $p = \frac{3(b-3)-a^2}{3} (4)$ и $q = \frac{2a^3 - 9a(b-3)+27(c-2a)}{27}$ (5). Подставив p и q в формулу (3), получим $Q = \frac{27c^2+((-18ab+4a^3-54a)c+4b^3+(-a^2-36)b^2+(42a^2+108)b-8a^4-9a^2-108}{108}$. Рассмотрим квадратный трёхчлен $Q(c) = \frac{27c^2+(-18ab+4a^3-54a)c+4b^3+(-a^2-36)b^2+(42a^2+108)b-8a^4-9a^2-108}{108}$. Вычислим дискриминант уравнения $Q(c) = 0$. $D = -16(3b - a^2 - 9)^3$. Определим корни уравнения $c_1 = \frac{18ab-4a^3+54a+\sqrt{D}}{54}$, $c_2 = \frac{18ab-4a^3+54a-\sqrt{D}}{54}$, $c_1 > c_2$. По теореме о квадратном трёхчлене $Q(c) = 0{,}25(c - c_1)(c - c_2)$. Исследуем знак $Q(c)$ и определим виды корней, используя источник [3,стр.518].

- Если $D < 0$, то $Q(c) > 0$, т.е. при выполнении условия $3b - a^2 - 9 > 0$ уравнение (1) имеет один действительный корень и два комплексных корня.
- При $D = 0$ возможны два случая: 1) При выполнении условий $\begin{cases} 3b - a^2 - 9 = 0, \\ c = \frac{18ab-4a^3+54a}{54}, \end{cases}$ $Q(c) = 0$ и корни уравнения (1) действительные и хотя бы

один кратный. 2) При выполнении условий $\begin{cases} 3b - a^2 - 9 = 0, \\ c \neq \frac{18ab - 4a^3 + 54a}{54}, \end{cases}$ $Q(c) > 0$, т. е. уравнение (1) имеет два комплексных и один действительный корень. С помощью поисковой системы нигма.рф в прямоугольной системе координат построена поверхность $c = \frac{18ab - 4a^3 + 54a}{54}$ (см. рис.2 приложение 2). Значение параметра a отмечается на оси абсцисс, параметра b - на оси ординат, параметра c - на оси аппликат.

- При $D > 0$ возможны три случая. 1) При выполнении условий $\begin{cases} 3b - a^2 - 9 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} c = \frac{18ab - 4a^3 + 54a + \sqrt{D}}{54}, \\ c = \frac{18ab - 4a^3 + 54a - \sqrt{D}}{54}, \end{array}\right. \end{cases}$ $Q(c) = 0$ и корни уравнения (1) действительные и хотя бы один кратный. 2) При выполнении условий $\begin{cases} b - a^2 - 9 < 0, \\ \frac{18ab - 4a^3 + 54a - \sqrt{D}}{54} < c < \frac{18ab - 4a^3 + 54a + \sqrt{D}}{54}, \end{cases}$ $Q(c) < 0$, т.е. все корни уравнения (1) – действительные числа. 3) При выполнении условий $\begin{cases} 3b - a^2 - 9 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} c > \frac{18ab - 4a^3 + 54a + \sqrt{D}}{54}, \\ c < \frac{18ab - 4a^3 + 54a - \sqrt{D}}{54}, \end{array}\right. \end{cases}$ $Q(c) > 0$,т.е. уравнение (1) имеет два комплексных корня и один действительный корень. С помощью поисковой системы нигма.рф в прямоугольной системе координат построена поверхность $c = \frac{18ab - 4a^3 + 54a + \sqrt{D}}{54}$ (см. рис.3 приложение 2) и поверхность $c = \frac{18ab - 4a^3 + 54a - \sqrt{D}}{54}$ (см. рис.4 приложение 2). Значение параметра a отмечается на оси абсцисс, параметра b - на оси ординат, параметра c - на оси аппликат.

5. Аналитическое решение уравнений 5-й и 7-й степени на множестве комплексных чисел

Рассмотрим симметрическое уравнение пятой степени

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Воспользуемся способом, описанным в источнике [2].

Корнем уравнения является число $x_1 = -1$. Разделим уравнение на двучлен $(x + 1)$.

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \,/ \div (x + 1)$$

По схеме Горнера:

	1	a	b	b	a	1

-1	1	$a-1$	$b-a+1$	$a-1$	1	0

Получим симметрическое уравнение 4-й степени

$$x^4+(a-1)x^3+(b-a+1)x^2+(a-1)x+1=0.$$

Т.е. дальнейший поиск корней уравнения 5-й степени сводится к решению симметрического уравнения 4-й степени, аналитическое решение для которого рассмотрено выше. С помощью такого же приёма решение уравнения 7-й степени сводится к решению симметрического уравнения 6-й степени, аналитическое решение для которого рассмотрено выше (см. источник [2]).

6. Определение степени симметрического уравнения, которое не может быть решено с помощью приёмов, используемых в работе

Теорема: с помощью приёмов, используемых в работе, невозможно решить уравнение, степень которого превосходит 9-ю

Доказательство: Рассмотрим симметрическое уравнение 10-й степени

$$x^{10}+ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+dx^4+cx^3+bx^2+ax+1=0.$$

Разделим его на $x^5\neq 0$.

$$x^{10}+ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+dx^4+cx^3+bx^2+ax+1=0/\ \div x^5\neq 0$$
$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e+\frac{d}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{b}{x^3}+\frac{a}{x^4}+\frac{1}{x^5}=0$$
$$\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+a\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+b\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+c\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+d\left(x+\frac{1}{x}\right)+e=0(1)$$

Замена: $x+\frac{1}{x}=t$, *тогда* $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$, $x^4+\frac{1}{x^4}=t^4-4t^2+2$, $x^5+\frac{1}{x^5}=t^5-5t^3+5t.$ Подставим правые части равенств в уравнение (1). После приведения подобных слагаемых получим уравнение

$$t^5+at^4+(b-5)t^3+(c-4a)t^2+(d-3b+5)t+(2a-2c+e)=0\ (2).$$

Уравнение (2) является уравнением 5-й степени. Но по теореме Абеля — Руффини уравнение степени n при $n\geq 5$ неразрешимо в радикалах(источник [7]). Следовательно симметрическое уравнение, степень которого равна 10, невозможно решить с помощью приёмов, используемых в работе. Симметрическое уравнение 11-й степени сводится к решению симметрического уравнения 10-й степени. Симметрические уравнения, степень которых больше 11, с помощью приёмов, используемых в работе сводятся к уравнениям степень которых равна 6 или больше 6, которые неразрешимы в радикалах. Следовательно, с помощью приёмов, используемых в работе, невозможно решить уравнение, степень которого превосходит 9-ю, ч.т.д.

7. Программы решения уравнений на языке Pascal

Использование аналитических решений, полученных в работе, алгоритмов из источника [3, стр.518-520], теоретического материала из источников [4], [5], [7], программы решении уравнения 3-й степени из источника [8] позволило составить программы для решения симметрических уравнений 2-й – 4-й, 6-й степени на множестве комплексных чисел на языке Pascal (см. приложение 3).

Выводы:

Использование теоретического и практического материала позволило решить следующие задачи:

- найти аналитические решения симметрических уравнений 4-й – 7-й степени на множестве комплексных чисел;

- составить программы решения симметрических уравнений 2-й – 4-й и 6-й степени на множестве комплексных чисел на языке Pascal;

- определить связь между видами корней симметрического уравнения 4-й степени и соотношением между параметрами уравнения, выраженным графическим способом;

- провести анализ вида корней вспомогательного уравнения при решении симметрического уравнения 6-й степени на множестве комплексных чисел;

- составить подборку заданий: особенности аналитических решений симметрических уравнений 4-й степени, содержащих тригонометрические и показательные функции; содержащих решение симметрических уравнений с элементарными функциями на множестве действительных чисел; содержащих решение симметрических уравнений с элементарными функциями на множестве комплексных чисел;

- доказать, что симметрические уравнения, степень которых больше 9-й не имеют решения в общем виде при использовании приёмов, рассмотренных в работе.

Для того, чтобы полностью ответить на поставленные вопросы, необходимо:

- найти аналитические решения симметрических уравнений 8-й – 9-й степени на множестве комплексных чисел;

- составить программы решения симметрических уравнений 8-й и 9-й степени на множестве комплексных чисел на языке Pascal

Литература

1. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. Справочник. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 144с.
2. http://schoolurga.my1.ru/load/nauchno_issledovatelskie_raboty_uchashhikhsja/reshenie_simmetricheskikh_uravnenij_6_j_7_j_8_j_9_j_stepeni/7-1-0-93
3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учебное пособие для педагогических институтов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.
4. Алгебра и начала анализ: Учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений/ С.М.Никольский, М.К.Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевкин. – 3-е издание – М.: Просвещение, 2004. – 448 с.
5. http://www.titorov.ru/klass_d/files/Lazarus.pdf
6. http://schoolurga.my1.ru/load/nauchno_issledovatelskie_raboty_uchashhikhsja/nakhozhdenie_svjazi_mezhdu_reshenijami_simmetricheskogo_uravnenija_i_znachenijami_parametrov_vkhodjashhikh_v_nego/7-1-0-92
7. https://ru.wikipedia.org/wiki/
8. http://www.mnschool.mn/polinom/f.html
9. http://www.nigma.ru

Приложение 1

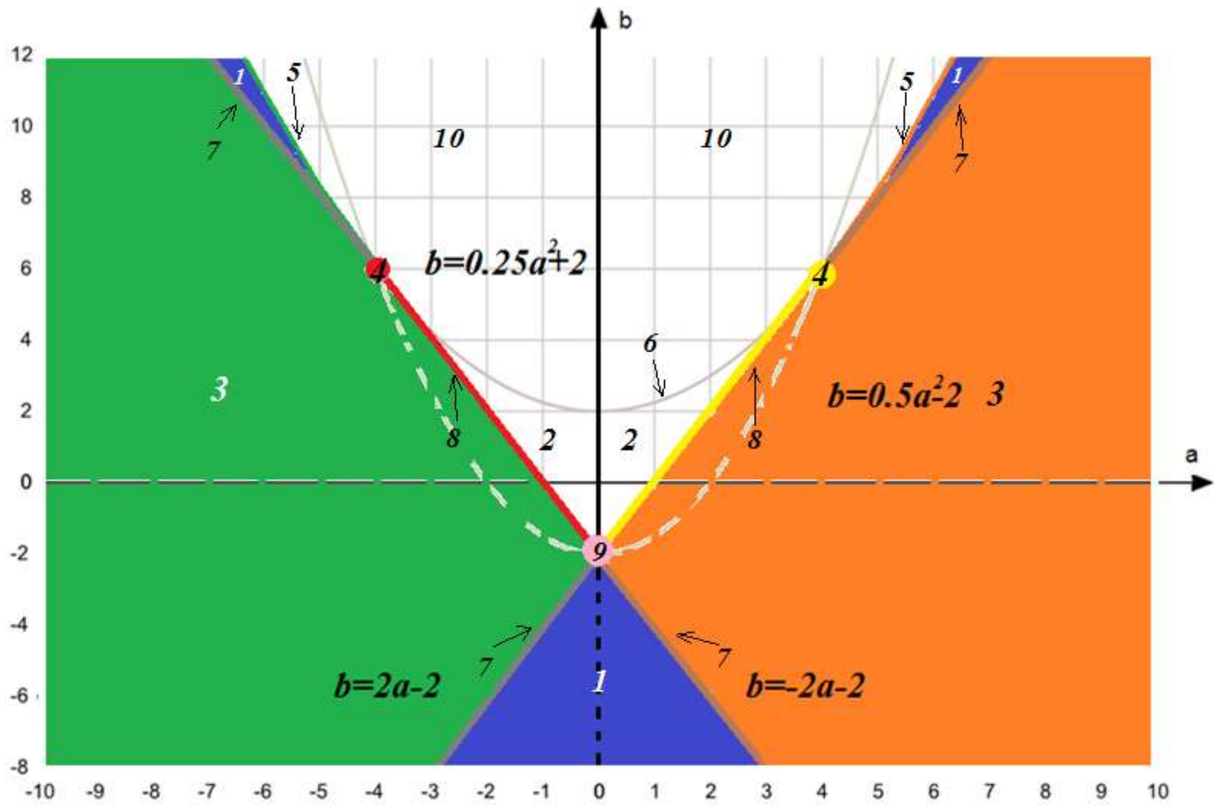

Рис.1

Приложение 2

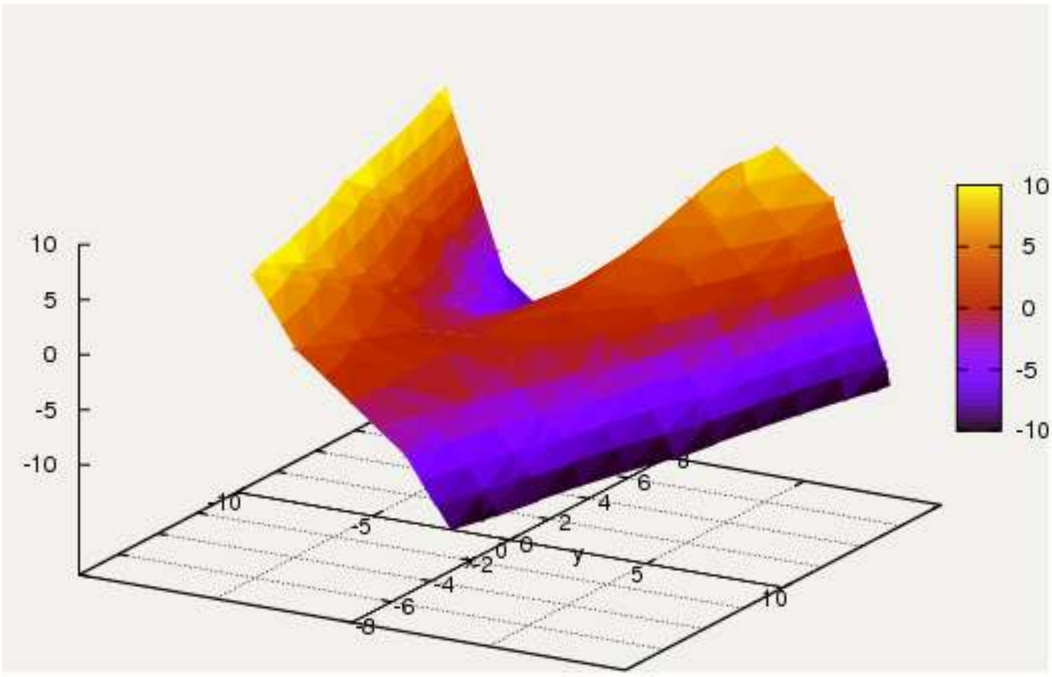

Рис.2

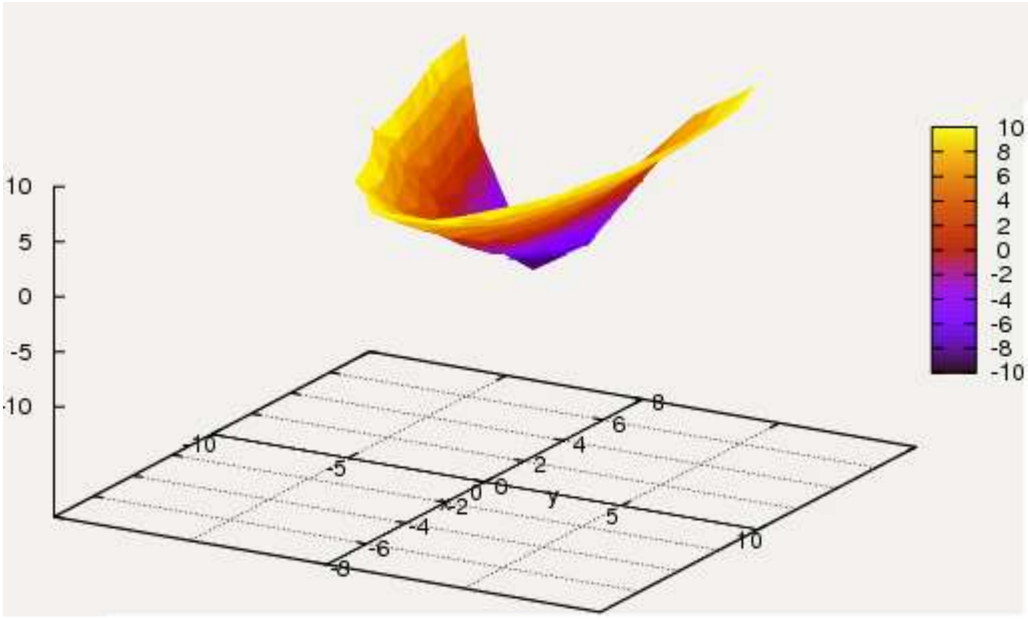

Рис.3

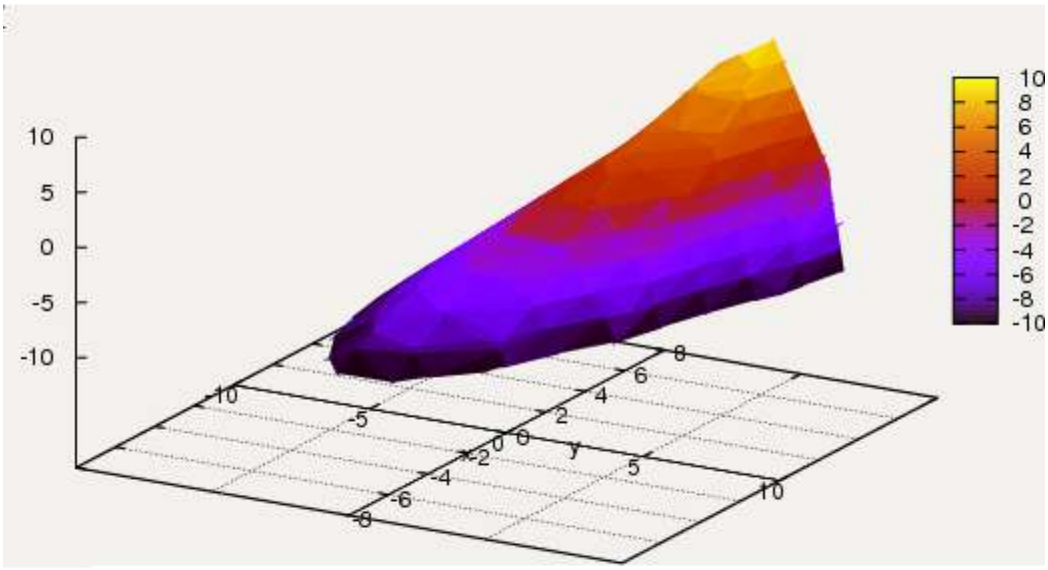

Рис.4

Приложение 3

Программа решения симметрических уравнений 4-й степени на множестве комплексных чисел

```
program sim_4;
Var a,b,c,d,f,t,k,n,fi,ro:real;

procedure gh;
begin
if (a*a-4*b+8>=0)and(2*a*a-2*a*sqrt(a*a-4*b+8)-4*b-8>=0)
then begin
writeln('x1=',(-a+sqrt(a*a-4*b+8)+sqrt(2*a*a-2*a*sqrt(a*a-4*b+8)-4*b-8))/4);
writeln('x2=',(-a+sqrt(a*a-4*b+8)-sqrt(2*a*a-2*a*sqrt(a*a-4*b+8)-4*b-8))/4);
end
else if (a*a-4*b+8>=0)and(2*a*a-2*a*sqrt(a*a-4*b+8)-4*b-8<0)
then begin
writeln('x1=',(-a+sqrt(a*a-4*b+8))/4,'+i*',(sqrt(abs(2*a*a-2*a*sqrt(a*a-
4*b+8)-4*b-8)))/4);
writeln('x2=',(-a+sqrt(a*a-4*b+8))/4,'-i*',(sqrt(abs(2*a*a-2*a*sqrt(a*a-
4*b+8)-4*b-8)))/4);
end
else begin
t:=2*a*a-4*b-8;
k:=-2*a*sqrt(4*b-a*a-8);
n:=sqrt(t*t+k*k);
fi:=Arctan((t/n)/sqrt(1-sqr(t/n)));
ro:= pi/2-fi;
writeln('x1=',(-a-sqrt(n)*cos(ro/2))/4,'-i*',(sqrt(n)*sin(ro/2)+sqrt(4*b-a*a-
8))/4);
writeln('x1=',(-a+sqrt(n)*cos(ro/2))/4,'+i*',(sqrt(n)*sin(ro/2)-sqrt(4*b-a*a-
8))/4);
end;
end;

procedure gh1;
begin
if (a*a-4*b+8>=0)and(2*a*a+2*a*sqrt(a*a-4*b+8)-4*b-8>=0)
then begin
writeln('x3=',(-a-sqrt(a*a-4*b+8)+sqrt(2*a*a+2*a*sqrt(a*a-4*b+8)-4*b-8))/4);
writeln('x4=',(-a-sqrt(a*a-4*b+8)-sqrt(2*a*a+2*a*sqrt(a*a-4*b+8)-4*b-8))/4);
end
else if (a*a-4*b+8>=0)and(2*a*a+2*a*sqrt(a*a-4*b+8)-4*b-8<0)
then begin
writeln('x1=',(-a-sqrt(a*a-4*b+8))/4,'+i*',(sqrt(abs(2*a*a+2*a*sqrt(a*a-
4*b+8)-4*b-8)))/4);
writeln('x2=',(-a-sqrt(a*a-4*b+8))/4,'-i*',(sqrt(abs(2*a*a+2*a*sqrt(a*a-
4*b+8)-4*b-8)))/4);
end
else begin
t:=2*a*a-4*b-8;
k:=-2*a*sqrt(4*b-a*a-8);
n:=sqrt(t*t+k*k);
fi:=Arctan((t/n)/sqrt(1-sqr(t/n)));
ro:= pi/2-fi;
writeln('x1=',(-a-sqrt(n)*cos(ro/2))/4,'-i*',(sqrt(n)*sin(ro/2)+sqrt(4*b-a*a-
8))/4);
writeln('x1=',(-a+sqrt(n)*cos(ro/2))/4,'+i*',(sqrt(n)*sin(ro/2)-sqrt(4*b-a*a-
8))/4);
end;
end;
```

```
begin
Writeln('Данная программа предназначена для решения симметрических уравнений
4-ой степени с 3-мя параметрамми вида : cx^4+dx^3+fx^2+dx+c=0.Введите
коффициенты c,d,f');
write('Введите параметр c.c=');Readln(c);
write('Введите параметр d.d=');Readln(d);
write('Введите параметр f.f=');Readln(f);

if c=0
then Writeln ('Уравнение не является симметрическим,так как первый параметр
не равен нулю')
else begin
a:=d/c;
b:=f/c;
gh;
end;
writeln('-----------------------------------------------------------------
-----------------------------------------------------------------
--------------');
if c=0
then Writeln ('-')
else gh1;
end.
```

Программа решения симметрических уравнений 6-й степени на множестве комплексных чисел

```
program Project1;
Var a,b,c,d,k,l,m,s,p,Q,T,fi,F,alfa,g,r,h,u,y,z,w,v,x1,i: real;

procedure lm_1;
begin
if -s/2+sqrt(Q)>=0 then
u:=exp(1/3*ln(-s/2+sqrt(Q)))
else
if -s/2+sqrt(Q)<0 then
u:=-exp(1/3*ln(abs(-s/2+sqrt(Q))))
else
u:=0;
if -s/2-sqrt(Q)>0 then
v:=exp(1/3*ln(-s/2-sqrt(Q)))
else
if -s/2-sqrt(Q)<0 then
v:=-exp(1/3*ln(abs(-s/2-sqrt(Q))))
else
v:=0;
x1:=u+v-k/3;
h:=-(u+v)/2-k/3;
g:=(u-v)/2*sqrt(3);
f:=h*h-g*g-4;
b:=2*h*g;
i:=sqrt(f*f+b*b);
t:=Arctan((f/i)/sqrt(1-sqr(f/i)));
r:= pi/2-t;
if x1*x1>=4 then begin
writeln('x1=',(x1+sqrt((x1)*(x1)-4))/2);
writeln('x2=',(x1-sqrt((x1)*(x1)-4))/2);
writeln('x3=',(h+sqrt(i)*cos(r/2))/2,'*i*(',(sqrt(i)*sin(r/2)+g)/2,')');
writeln('x4=',(h+sqrt(i)*cos(r/2))/2,'-i*(',(sqrt(i)*sin(r/2)+g)/2,')');
writeln('x5=',(h-sqrt(i)*cos(r/2))/2,'+i*(',(sqrt(i)*sin(r/2)-g)/2,')');
writeln('x6=',(h-sqrt(i)*cos(r/2))/2,'-i*(',(sqrt(i)*sin(r/2)-g)/2,')');
end
```

```
else begin
writeln('x1=',(x1/2),'+i*',(sqrt(abs((x1)*(x1)-4)))/2);
writeln('x2=',(x1/2),'-i*',(sqrt(abs((x1)*(x1)-4)))/2);
writeln('x3=',(h+sqrt(i)*cos(r/2))/2,'+i*(',(sqrt(i)*sin(r/2)+g)/2,')');
writeln('x4=',(h+sqrt(i)*cos(r/2))/2,'-i*(',(sqrt(i)*sin(r/2)+g)/2,')');
writeln('x5=',(h-sqrt(i)*cos(r/2))/2,'+i*(',(sqrt(i)*sin(r/2)-g)/2,')');
writeln('x6=',(h-sqrt(i)*cos(r/2))/2,'-i*(',(sqrt(i)*sin(r/2)-g)/2,')');
end
end;

procedure lm_2;
begin
t:=sqrt(-p*p*p/27);
fi:=-s/(2*t);
fi:=pi/2-arctan(fi/sqrt(1-fi*fi));
if (2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)-4>=0
then begin
writeln('x1=',((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-
k/3)+sqrt((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)-
4))/2);
writeln('x2=',((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)-
sqrt((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)-
4))/2);
end
else begin
writeln('x1=',(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-
k/3)/2,'+i*',(sqrt(abs((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-
k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)-4)))/2);
writeln('x2=',(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)/2,'-
i*',(sqrt(abs((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3)-
k/3)-4)))/2);
end;

if (2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-
k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-k/3)-4>=0 then begin
writeln('x3=',((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-
k/3)+sqrt((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-
k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-k/3)-4))/2);
writeln('x4=',((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-k/3)-
sqrt((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-
k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-k/3)-4))/2);
end
else begin
writeln('x3=',(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-
k/3)/2,'+i*',(sqrt(abs((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-
k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-k/3)-4)))/2);
writeln('x4=',(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-k/3)/2,'-
i*',(sqrt(abs((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-
k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3+2*pi/3)-k/3)-4)))/2);
end;

if (2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-
2*pi/3)-k/3)-4>=0 then begin
writeln('x5=',((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-
k/3)+sqrt((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-
2*pi/3)-k/3)-4))/2);
writeln('x6=',((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-k/3)-
sqrt((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-
2*pi/3)-k/3)-4))/2);
end
else begin
```

```
writeln('x5=',(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-
k/3)/2,'+i*',(sqrt(abs((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-
k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-k/3)-4)))/2);
writeln('x6=',(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-k/3)/2,'-
i*',(sqrt(abs((2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-
k/3)*(2*exp(1/3*ln(t))*cos(fi/3-2*pi/3)-k/3)-4)))/2);
end;
end;


begin
write('a=');Readln(a);
write('b=');Readln(b);
write('c=');Readln(c);
write('d=');Readln(d);
if a=0 then writeln('-')
else begin
k:=b/a;
l:=c/a-3;
m:=d/a-2*b/a;
p:=(3*l-k*k)/3;
s:=2*k*k*k/27-k*l/3+m;
Q:=(p/3)*sqr(p/3)+sqr(s/2);
if Q>=0 then lm_1
else lm_2;
end;
writeln

end.
```