Научный форум молодых исследователей «Шаг в будущее»

Использование свойств трехгранного угла и свойств параллелепипеда при решении многовариантной задачи про объём параллелепипеда

Автор: Бичок Владислав Константинович, ученик 11А класса

МАОУ «Юргинская СОШ»

Руководитель: Белозеров Владимир Иванович,

учитель математики, Заслуженный учитель РФ

Российская Федерация, с. Юргинское,

2015г

Содержание:

Использование свойств трехгранного угла и свойств параллелепипеда при решении многовариантной задачи про объём параллелепипеда

Бичок Владислав, 11а класс

Россия, с. Юргинское

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение

«Юргинская средняя общеобразовательная школа»

Аннотация

В нашей работе рассматривается многовариантная задача про объем параллелепипеда.

Цель работы: найти различные варианты решения задачи про объем параллелепипеда используя свойства трехгранного угла и свойства параллелепипеда.

Используемые методы:

1) Изучение литературы по данному вопросу.
2) Анализ задачи.
3) Аналитическое решение задачи в частном и общем видах.

Выводы:

1. Задача не может иметь более 2-х различных решений.

2. Задача может иметь одно решение, два различных решения.

Получены данные:

1. Определены условия, при которых задача имеет 1 решение, 2 различных решения.

2. Найдены аналитические решения для 1-го решения и для 2-х решения.

3. Составлены и решены авторские задачи по теме «Объём параллелепипеда».

Использование свойств трехгранного угла и свойств параллелепипеда при решении многовариантной задачи про объём параллелепипеда

Бичок Владислав, 11а класс

Россия, с. Юргинское

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение

«Юргинская средняя общеобразовательная школа»

План исследований

Решая задачу № 681 из учебника «Геометрия 10-11» под редакцией Л.С. Атанасяна [1, стр.171]: «Все грани параллелепипеда – равные ромбы, диагонали которых равны 6 см и 8 см. Найдите объем параллелепипеда», у нас получилось два разных решения, результат в одном из которых совпал с ответом, предложенным в учебнике. (Предложенные решения рассмотрены в приложении 2). Основное отличие состояло в том, что параллелепипеды имели разные трёхгранные углы, что не противоречило условию задачи.

Гипотеза: если верно использовать свойства трехгранного угла и свойства параллелепипеда, то можно определить все варианты решения предложенной задачи.

В процессе работы, мы поставили перед собой следующие задачи:

1) Рассмотреть свойства трёхгранных углов.
2) Выполнить анализ задачи, используя свойства трехгранных углов.
3) Провести поиск разных решений в общем виде.
4) Составить и решить многовариантные задачи по теме «Объём параллелепипеда».

Использование свойств трехгранного угла и свойств параллелепипеда при решении многовариантной задачи про объём параллелепипеда

Бичок Владислав, 11а класс

Россия, Тюменская область, с. Юргинское

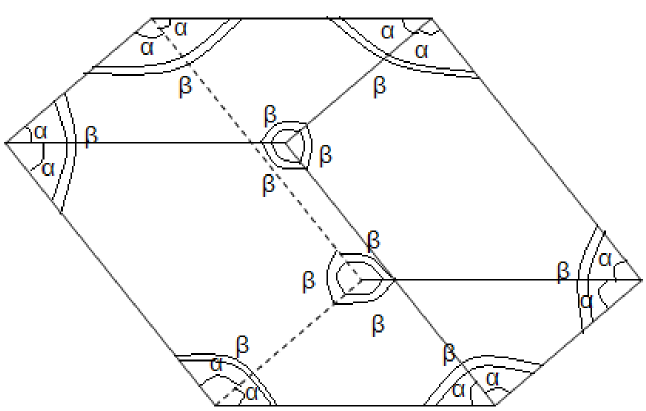
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение

«Юргинская средняя общеобразовательная школа»

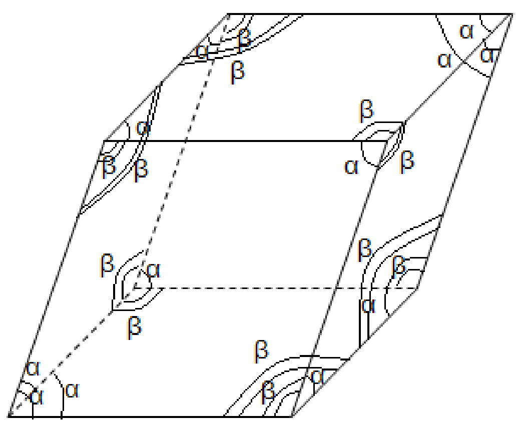
1.1 Анализ первой авторской задачи

Задача 1. Все грани параллелепипеда ромбы со стороной а и острым углом α . Найдите объем параллелепипеда.

Допустим, нам дан параллелепипед, грани которого равные ромбы, с плоскими углами α и β. Пусть α≤ β. Определим количество возможных решений задачи с помощью комбинаторного метода. Для этого определим количество различных трехгранных углов, которые составлены из трех плоских углов таким образом, что один из плоских углов равен либо α, либо β. Количество различных трехгранных углов равно числу перестановок $P = 2 * 2 * 2 = 8$. Получим этот же результат с помощью перебора: αββ, ααβ, ααα, βαα, ββα, βββ, βαβ, αβα. Т.к. параллелепипед является центрально-симметричной фигурой, то при противоположных вершинах параллелепипеда расположены одинаковые трёхгранные углы. Следовательно, в одном параллелепипеде будет не более 4 различных трёхгранных углов. Рассмотрим 2 параллелепипеда с различными трехгранными углами.



1вариант



2вариант

В таблице перечислены трёхгранные углы, имеющиеся в каждом из параллелепипедов

1вариант	2вариант
αββ	ααβ
ββα	βαα
βββ	ααα
βαβ	αβα

Таблица 1

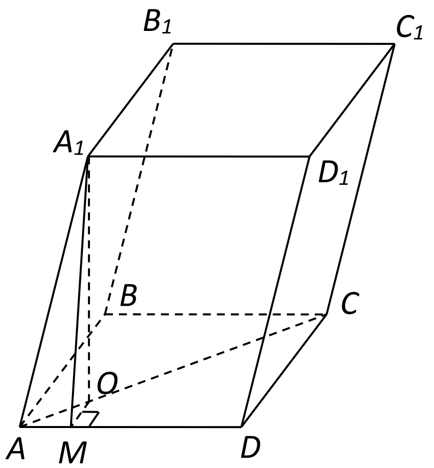
Итак, 4 различных варианта трехгранных углов будут содержаться в случае, когда в параллелепипеде имеется угол, составленный из трех плоских углов α. И 4 других варианта трехгранных углов буду содержаться в случае, когда в параллелепипеде имеется угол, составленный из трех плоских углов β. В итоге использованы все 8 вариантов трехгранных углов, значит трех и более решений у данной задачи не может быть.

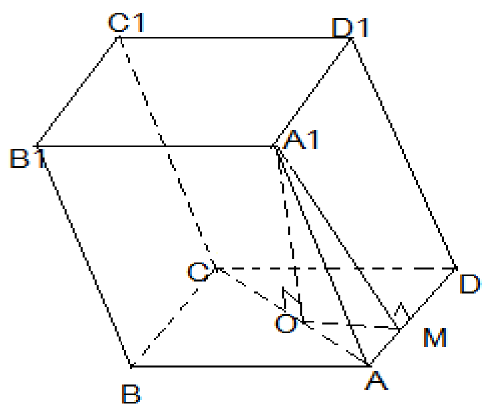
Всегда ли задача имеет два решения? Т.к. сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360^0 [1, стр. 53], то решение, содержащее комбинацию βββ, возможно, если плоский угол β<360°:3, т.е. β<120°, а 60°<α<90°. Решение, содержащее комбинацию ααα, возможно при всех 90°<β<180°. Следовательно, количество решений задачи как зависимость от значений α и β, можно представить в виде таблицы:

Количество решений	α	β
2	60°<α<90°	90°<β<120°
1	0°<α≤60°	120°≤β<180°
1	90°	90°

Таблица 2

1.2 Поиск решений в общем виде.





Решим первую авторскую задачу в общем виде.

Решение задачи начинается с анализа – что надо знать, чтобы найти объем параллелепипеда? Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту, т.е. $V = S_{осн} \cdot H$. Основанием данного параллелепипеда является ромб со стороной а и острым углом α, следовательно, площадь основания можно найти по формуле $S = a^2 \sin\alpha$.

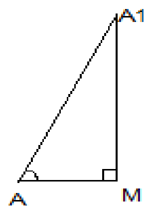
Чтобы найти высоту, надо ее построить. Где будет лежать основание перпендикуляра, проведенного, допустим, из вершины A_1 к плоскости основания? Ответить на этот вопрос можно, зная свойство трехгранного угла: если в трехгранном угле два плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла является его биссектрисой(смотри приложение 1). Т.е. основание высоты будет лежать на диагонали ромба ABCD.

Далее решение задачи сводится к вычислению элементов параллелепипеда.

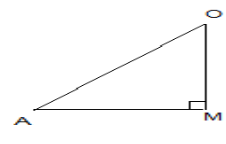
Первое решение, когда точка A_1 является вершиной трёхгранного угла, состоящего из трёх острых углов α, рассмотрено в источнике [2]. (смотри приложение 3)

Второе решение, когда точка A_1 является вершиной трёхгранного угла, состоящего из трёх тупых углов β, найдено нами самостоятельно.

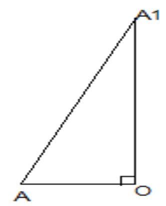
Из треугольника AA_1M($\llcorner M=90°$) $\cos\alpha = \frac{AM}{AA_1}$ $AM = a \cdot \cos\alpha$.



Из треугольника AOM($\llcorner M=90°$) $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{AM}{AO}$ $AO = \dfrac{AM}{\cos\frac{\beta}{2}} = \dfrac{a \cdot \cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$.



По теореме Пифагора из треугольника AA_1O($\llcorner O=90°$)



$$A_1O = \sqrt{AA_1^{\,2} - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a \cdot \cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 \cdot \cos^2\frac{\beta}{2} - a^2 \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\beta}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$$

$$V = \frac{a}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}\; a^2\sin\alpha = \frac{a^3 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$= 2a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{5\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1 - 4\sin^4\frac{\alpha}{2}}$$

Т.е. $V = 2a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{5\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1 - 4\sin^4\frac{\alpha}{2}}$

Или $V = \frac{a}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}\; a^2\sin\alpha = 2a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$

Вывод: если в параллелепипеде есть трехгранный угол, составленный из трех острых углов α, то объем параллелепипеда вычисляется по формуле $V_1 = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$. Если в параллелепипеде есть трехгранный угол, составленный из трех тупых углов β=180°-α , то объем параллелепипеда вычисляется по формуле $V_2 = 2a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$.

1.3 Дополнительный анализ задачи

Исследуем отношение объемов параллелепипеда, как зависимость от значений угла α.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}}{2a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2} - \cos^2\alpha}}$$

Составим таблицу значений отношения объемов от 61° до 90°.

α,°	V1/V2	α,°	V1/V2	α,°	V1/V2
61	2,7938	71	1,1069	81	1,0083
62	2,0345	72	1,0864	82	1,0057
63	1,7100	73	1,0696	83	1,0038
64	1,5236	74	1,0558	84	1,0024
65	1,4014	75	1,0444	85	1,0014
66	1,3150	76	1,0350	86	1,0007
67	1,2508	77	1,0272	87	1,0003
68	1,2016	78	1,0209	88	1,0002
69	1,1629	79	1,0157	89	1,0001
70	1,1319	80	1,0116	90	1,0000

Таблица 3

Видим, что чем острей угол, тем больше значение отношения объемов.

Применение формул приведения показывает, что 1-м решением можно пользоваться для допустимых значений углов β для того чтобы получить 2-е решение.

$$V = 2a^3 \sin\frac{180° - \alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{180° - \alpha}{2}\sin\frac{3(180° - \alpha)}{2}} = 2a^3 \sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(270° - \frac{3\alpha}{2}\right)}$$

$$= 2a^3 cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{cos\frac{\alpha}{2}\left(-cos\frac{3\alpha}{2}\right)} = 2a^3 cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\frac{1}{2}(\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\right))}$$

$$= 2a^3 cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos\alpha)} = 2a^3 \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$$

Т.е. формулу можно использовать одну, но необходимо знать в каком случае задача имеет одно решение, а в каком задача имеет два различных решения.

1.4 Дополнительные авторские задачи

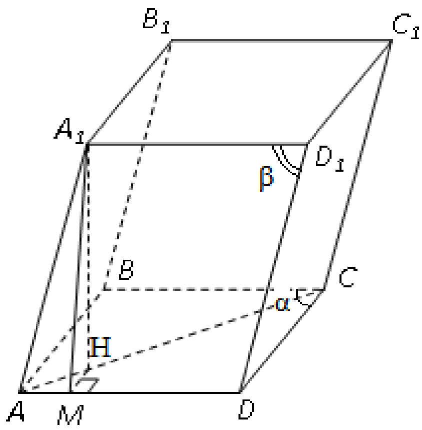
Нами составлены авторские задачи, при решении которых используем рассмотренные свойства трёхгранных углов и свойства параллелепипеда.

Задача 2. В основании параллелепипеда лежит ромб с диагоналями 6дм и 8дм. Боковыми гранями параллелепипеда являются одинаковые параллелограммы со сторонами 4дм и 5дм и острым углом 60^0. (Решение рассмотрено в приложении 4)

Задача 3. В основании параллелепипеда лежит ромб со стороной а и острым углом $\propto$. Боковыми гранями параллелепипеда являются одинаковые ромбы с острым углом β. Найдите объём параллелепипеда.

Анализ задачи: найдем количество решений в зависимости от параметров α и β. Пусть α-острый угол ромба ABCD, β-острый угол параллелограмма AA_1D_1D. Найдем количество неповторяющихся углов при вершине А методом перебора:

1. αββ
2. αβ(180°-β)
3. α(180°-β)β
4. α(180°-β) (180°-β)
5. (180°-α)ββ
6. (180°-α) (180°-β)β



7. (180°-α)β(180°-β)
8. (180°-α) (180°-β) (180°-β)

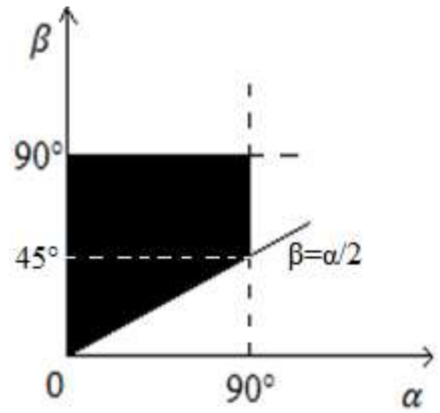
По полученным данным составим таблицу трехгранных углов параллелепипеда, но т.к. параллелепипед является центрально-симметричной фигурой, и при противоположных вершинах параллелепипеда расположены одинаковые трёхгранные углы, то трехганный углы при вершинах A_1, B_1, C_1, D_1 можно не включать в таблицу.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	α β β	α β (180°-β)	α (180°-β) β	α (180°-β) (180°-β)	(180°-α) β β	(180°-α) (180°-β) β	(180°-α) β (180°-β)	(180°-α) (180°-β) (180°-β)
B	(180°-α) (180°-β) β	(180°-α) β β	(180°-α) (180°-β) (180°-β)	(180°-α) β (180°-β)	α β (180°-β)	α β β	α (180°-β) (180°-β)	α β (180°-β)
C	α (180°-β) (180°-β)	α β (180°-β)	α β (180°-β)	α β β	(180°-α) (180°-β) (180°-β)	(180°-α) β (180°-β)	(180°-α) β (180°-β)	(180°-α) β β
D	(180°-α) β (180°-β)	(180°-α) (180°-β) (180°-β)	(180°-α) β β	α (180°-β) β	α β (180°-β)	α (180°-β) (180°-β)	α β β	α β (180°-β)

Так как 1, 4, 6, 7 случаи между собой одинаковы и 2, 3, 5, 8, соответственно, возможны всего два варианта решения.

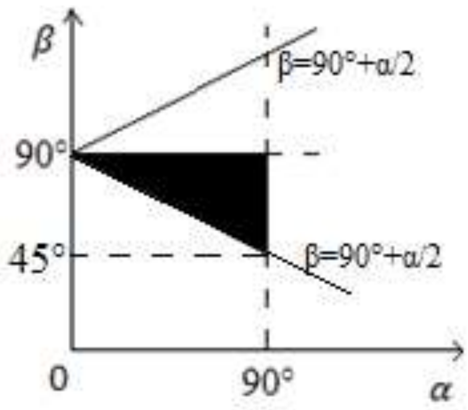
Зная что, сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360^0 и плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других, имеем следующую систему неравенств для первого решения. Преобразуя данную систему мы получаем более простую систему неравенств, и решаем ее графическим способом, учитывая, что острый угол меньше 90°. Заштрихованная область соответствует наличию первого решения.

$$\begin{cases} \alpha<2\beta \\ \beta<\alpha+\beta \\ \alpha+2\beta<360° \\ \alpha<360°-2\beta \\ 180°-\beta<180°-\beta+\alpha \\ \alpha+360°-2\beta<360° \\ 180°-\alpha<180°-\beta+\beta \\ 180°-\beta<180°-\alpha+\beta \\ \beta<180°-\alpha+180°-\beta \\ 180°-\alpha+180°-\beta+\beta<360° \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha<2\beta \\ \alpha>0 \\ \beta<180°-\alpha/2 \end{cases}$$

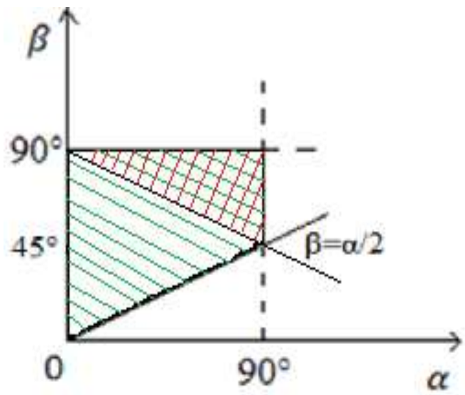


Аналогичным способом определяем значения α, β при которых имеется второе решение.

$$\begin{cases} \alpha<180°-\beta+\beta \\ \beta<180°-\beta+\alpha \\ 180°-\beta<\alpha+\beta \\ \alpha+\beta+180°-\beta<360° \\ 180°-\alpha<2\beta \\ \beta<180°-\alpha+\beta \\ 180°-\alpha+2\beta<360° \\ 180°-\alpha<360°-2\beta \\ 180°-\beta<180°-\alpha+180°-\beta \\ 180°-\alpha+360°-2\beta<360° \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha<180° \\ \beta>90°-\alpha/2 \\ \beta<90°+\alpha/2 \end{cases}$$



Совместим заштрихованные области первого и второго решения мы получим область, где существуют оба решения. Отметим, что она совпадает с областью второго решения. Область, где нет штриховки, соответствует отсутствию решений.



Решение: 1) $V = S_{ABCD} \cdot A_1H$; $S_{ABCD}=a^2\sin\alpha$

Найдем A_1H: из ΔA_1AM; $AM=a \cdot \cos\beta$.

Из ΔAHM $AH = \frac{a\cdot\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

По т. Пифагора из ΔA_1AM $A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} =$

$$= \sqrt{\frac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - a^2\cdot\cos^2\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{a^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}.$$

$$V_1 = a^2\sin\alpha\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta} = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}$$

2)$V = S_{ABCD} \cdot A_1H$; $S_{ABCD}=a^2\sin\alpha$

Найдем A_1H: из ΔA_1AM; $AM=a \cdot \cos\beta$.

Из ΔAHM $AH = \frac{a\cdot\cos\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

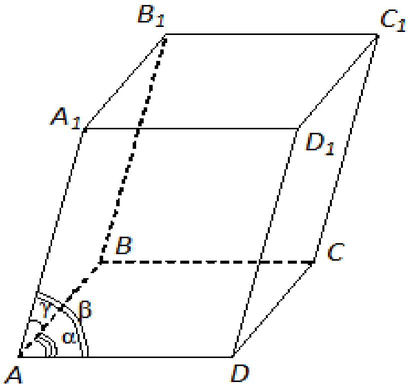
По т. Пифагора из ΔA_1AM $A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2\cdot\cos^2\beta}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} =$

$$= \sqrt{\frac{a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - a^2\cdot\cos^2\beta}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{a^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}.$$

$$V_2 = a^2\sin\alpha\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\beta} = 2a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\beta}.$$

Задача 4. В основании параллелепипеда лежит ромб со стороной а и острым углом α. Боковыми гранями параллелепипеда являются два ромба с острым углом β и два ромба с острым углом γ. Найдите условия, при которых задача имеет одно, два решения или не имеет решений.

Решение: пусть α-острый угол ромба ABCD, β-острый угол параллелограмма AA_1D_1D, γ-острый угол ромба AA_1B_1B. Найдем количество неповторяющихся углов при вершине А методом перебора:



1. α β γ
2. α (180°-β) γ
3. (180°-α) β γ
4. α β(180°-γ)
5. (180°-α) (180°-β) γ
6. (180°-α) β (180°-γ)
7. α (180°-β) (180°-γ)
8. (180°-α) (180°-β) (180°-γ)

По полученным данным составим таблицу трехгранных углов параллелепипеда, но т.к. параллелепипед является центрально-симметричной фигурой, и при противоположных вершинах параллелепипеда расположены одинаковые трёхгранные углы, то трехгранный углы при вершинах A_1, B_1, C_1, D_1 можно не включать в таблицу.

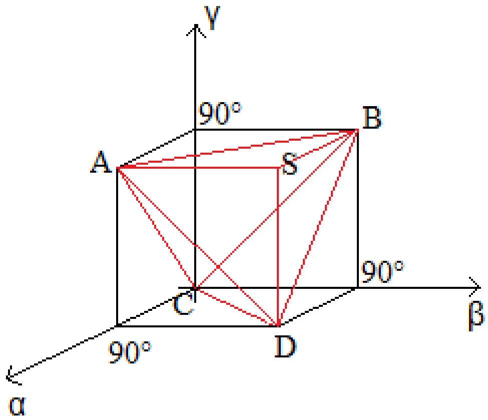
	1	2	3	4	5	6	7	8
A	α β γ	α (180°-β) γ	(180°-α) β γ	α β (180°-γ)	(180°-α) (180°-β) γ	(180°-α) β (180°-γ)	α (180°-β) (180°-γ)	(180°-α) (180°-β) (180°-γ)
B	(180°-α) β (180°-γ)	(180°-α) (180°-β) (180°-γ)	α β (180°-γ)	(180°-α) β γ	α (180°-β) (180°-γ)	α β γ	(180°-α) (180°-β) γ	α (180°-β) γ
C	α (180°-β) (180°- γ)	α β (180°- γ)	(180°-α) (180°-β) (180°- γ)	α (180°-β) γ	(180°-α) β (180°- γ)	(180°-α) (180°-β) γ	α β γ	(180°-α) β γ
D	(180°-α) (180°-β) γ	(180°-α) β γ	α (180°-β) γ	(180°-α) (180°-β) (180°- γ)	α β γ	α (180°-β) γ	α β (180°-γ)	α β (180°-γ)

Так как 1, 5, 6, 7 случаи между собой одинаковы и 2, 3, 4, 8 соответственно одинаковы, возможны всего два варианта решения. Выясним, когда возможен первый вариант решения.

Зная что, сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360^0 и плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других, имеем следующую систему неравенств. Преобразуя данную систему, мы получаем более простую систему неравенств, и решаем ее графическим способом, учитывая, что острый угол меньше 90°. Область, ограниченная многогранником ABCDS, соответствует наличию первого решения.

$$\begin{cases} \alpha < \beta + \gamma \\ \beta < \alpha + \gamma \\ \gamma < \alpha + \beta \\ \alpha + \beta + \gamma < 360° \\ 180° - \alpha < \beta + 180° - \gamma \\ \beta < 180° - \alpha + 180° - \gamma \\ 180° - \gamma < \beta + 180° - \alpha \\ 180° - \alpha + \beta + 180° - \gamma < 360° \\ \alpha < 180° - \beta + 180° - \gamma \\ 180° - \beta < 180° - \gamma + \alpha \\ 180° - \gamma < 180° - \beta + \alpha \\ \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma < 360° \\ 180° - \alpha < 180° - \beta + \gamma \\ 180° - \beta < 180° - \alpha + \gamma \\ \gamma < 180° - \alpha + 180° - \beta \\ 180° - \alpha + 180° - \beta + \gamma < 360° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha < \beta + \gamma \\ \alpha > \beta - \gamma \\ \alpha > \gamma - \beta \end{cases}$$



Аналогичным способом определяем значения α, β и γ при которых имеется второе решение. Область, ограниченная многогранником ABCD(рис. 1), соответствует наличию второго решения.

$$\begin{cases} \alpha < 180° - \beta + \gamma \\ 180° - \beta < \alpha + \gamma \\ \gamma < \alpha + 180° - \beta \\ \alpha + 180° - \beta + \gamma < 360° \\ 180° - \alpha < 180° - \beta + 180° - \gamma \\ 180° - \beta < 180° - \alpha + 180° - \gamma \\ 180° - \gamma < 180° - \alpha + 180° - \beta \\ 180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma < 360° \\ \alpha < \beta + 180° - \gamma \\ \beta < \alpha + 180° - \gamma \\ 180° - \gamma < \alpha + \beta \\ \alpha + \beta + 180° - \gamma < 360° \\ 180° - \alpha < \beta + \gamma \\ \beta < 180° - \alpha + \gamma \\ \gamma < 180° - \alpha + \beta \\ 180° - \alpha + \beta + \gamma < 360° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha < 180° - \beta + \alpha \\ \alpha > 180° - \beta - \gamma \\ \alpha < 180° + \beta - \gamma \\ \alpha > -180° + \beta + \gamma \end{cases}$$

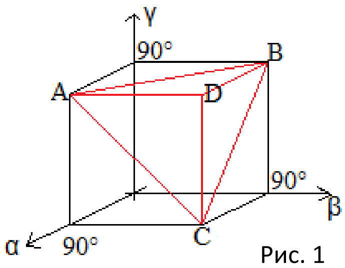


Рис. 1

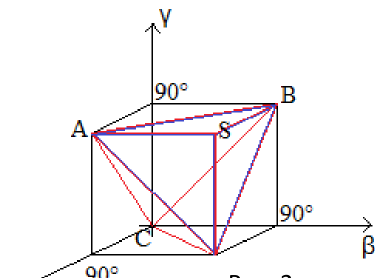


Рис. 2

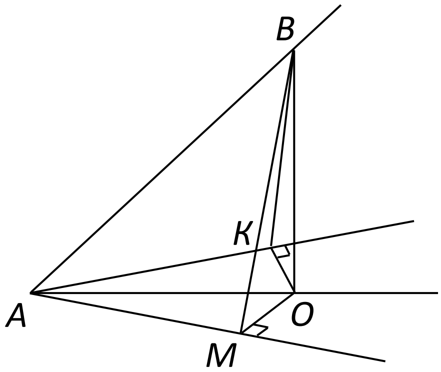
Совместим области первого и второго решений мы получим область ABDS(рис. 2), где существуют оба решения. Отметим, что она совпадает с областью второго решения. Область, которая не ограничена фигурой ABCDS, соответствует отсутствию решений.

Литература.

1) Геометрия 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и профильный уровни/[Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – 23-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 255 с.
2) http://lib.znate.ru/docs/index-47027.html /Свойство трехгранного угла как ключевая задача (Г.И. Ковалева).
3) http://multiring.ru/course/stereometry/content/chapter4/section/paragraph4/theory.html#.VfOuEvbtmko / Определение и свойства трехгранного угла.
4) http://www.ankolpakov.ru/naklonnyj-parallelepiped-svojstva-formuly-i-zadachi-repetitora-po-matematike/ Наклонный параллелепипед: свойства, формулы и задачи репетитора по математике. Колпаков Александр Николаевич профессиональный репетитор по математике, методист.

Приложение 1

Если в трехгранном угле два плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла является его биссектрисой. [2]



Дано: $\angle BAM = \angle BAK$, $BO \perp (AMK)$.

Доказать, что AO – биссектриса $\angle MAK$.

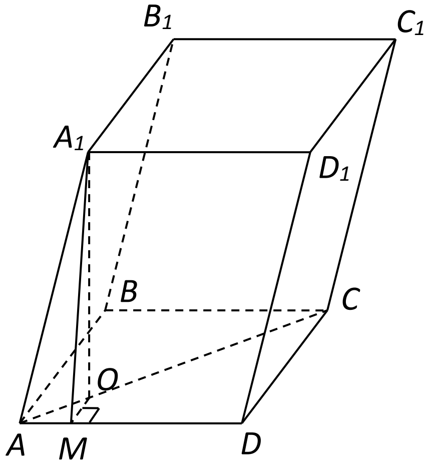
Доказательство.

Пусть $OM \perp AM$ и $OK \perp AK$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $BM \perp AM$ и $BK \perp AK$.

Треугольники BAM и BAK равны как прямоугольные по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $AM = AK$.

Треугольники AMO и AKO равны как прямоугольные по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle OAM = \angle OAK$, а значит, AO – биссектриса $\angle MAK$.

Приложение 2



1-е решение: Точка A является вершиной острого угла в параллелограмме ABCD, т.е. $\mathrm{BD} = 6$, $\mathrm{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 8 = 24$

$$\mathrm{A_1M} = 24 : 5 = 4{,}8$$

Из треугольника $AA_1M(\llcorner M = 90°)$ по теореме Пифагора AM=$\sqrt{{AA_1}^2 - AM^2} =$

$\sqrt{5^2 - 4{,}8^2} = 1{,}4$

Пусть точка K – точка пересечения диагоналей ABCD. Т.к. BD=6, то KD=3.$\cos DAK =$ $AK{:}\,AD = 4{:}\,5 = 0{,}8$

Из треугольника AOM $AO \cdot \cos DAK = AM$,

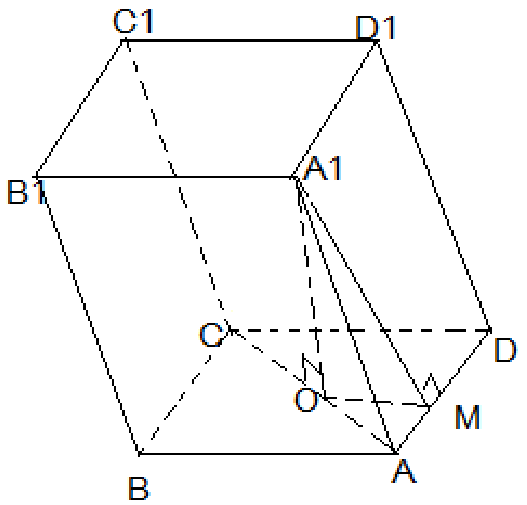
$AO = \frac{1{,}4}{0{,}8} = 1{,}75$

По теореме Пифагора из треугольника $AA_1O(\llcorner O=90°)$

$A_1O = \sqrt{{AA_1}^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 1{,}75^2} = \frac{3\sqrt{39}}{4}$.

Объём параллелепипеда равен $V = 24 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{4} = 18\sqrt{39}$.

Ответ: $V = 18\sqrt{39}$



2-е решение: Точка A является вершиной тупого угла в параллелограмме ABCD, т.е. BD = 8 , $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 8 = 24$

$$A_1M = 24{:}\,5 = 4{,}8$$

Из треугольника $AA_1M(\llcorner M = 90°)$ по теореме Пифагора AM=$\sqrt{{AA_1}^2 - AM^2} =$

$\sqrt{5^2 - 4{,}8^2} = 1{,}4$

Пусть точка K – точка пересечения диагоналей ABCD. Т.к. BD=8, то KD=4.$\cos DAK = AK : AD = 3 : 5 = 0{,}6$

Из треугольника АОМ $AO \cdot \cos DAK = AM$,

$AO = \frac{1{,}4}{0{,}6} = \frac{7}{3}$

По теореме Пифагора из треугольника AA_1O(∟O=90°)

$$A_1O = \sqrt{{AA_1}^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{11}}{3}.$$

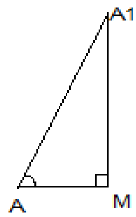
Объём параллелепипеда равен $V = 24 \cdot \frac{4\sqrt{11}}{3} = 32\sqrt{11}$.

Ответ: $V = 32\sqrt{11}$

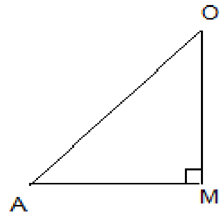
Приложение 3

Первое решение, когда точка A_1 является вершиной трёхгранного угла, состоящего из трёх острых углов α, рассмотрено в источнике [2].

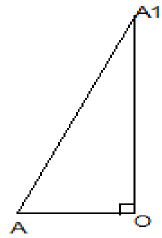
Из треугольника AA_1M(∟M=90°) $\cos\alpha = \frac{AM}{AA_1}$; $AM = a \cdot \cos\alpha$.



Из треугольника АОМ(∟M=90°) $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AM}{AO}$; $AO = \frac{AM}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a \cdot \cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.



По теореме Пифагора из треугольника AA_1O(∟O=90°)



$$A_1O = \sqrt{{AA_1}^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a \cdot \cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} - a^2 \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$$

$$V=\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}\ a^2\sin\alpha=\frac{a^3 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

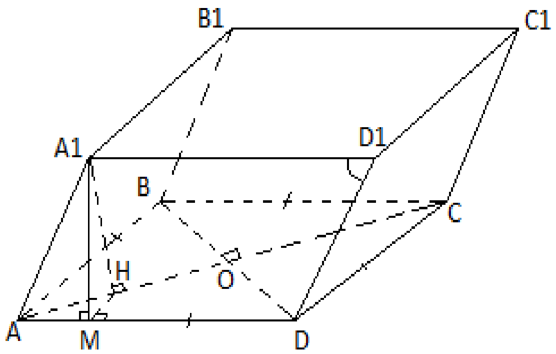
$$=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}+4\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}-4\sin^4\frac{\alpha}{2}}$$

$$=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\left(3\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^3\frac{\alpha}{2}\right)}=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

Т.е. $V=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$

Приложение 4



1-е решение:

$V=S_{ABCD}\cdot A_1H$; $S_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=24$.

Найдем A_1H: из ΔA_1AM $AM=A_1A\cdot\cos60°=4\cdot0{,}5=2$.

Из ΔAHM $AH=\frac{AM}{\cos\angle OAD}$; найдем $\cos\angle OAD$ из ΔAOD; $\cos\angle OAD=\frac{AO}{AD}=0{,}8$; т.е $AH=\frac{2}{0{,}8}=2{,}5$.

По т.Пифагора из ΔA_1AM $A_1H=\sqrt{A_1A^2-AH^2}=\sqrt{16-\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{39}}{2}$.

$V=24\cdot\frac{\sqrt{39}}{2}=12\sqrt{39}$.

Ответ: $V=12\sqrt{39}$.

2-е решение:

$\mathrm{V} = \mathrm{S_{ABCD}} \cdot \mathrm{A_1H}$; $\mathrm{S_{ABCD}}=\frac{\mathrm{AC \cdot BD}}{2}=24$.

Найдем $\mathrm{A_1H}$: из $\Delta \mathrm{A_1AM}$ AM=$\mathrm{A_1A} \cdot \cos 60°=4 \cdot 0{,}5=2$.

Из ΔAHM AH=$\frac{\mathrm{AM}}{\cos \llcorner \mathrm{OAD}}$; найдем $\cos \llcorner \mathrm{OAD}$ из ΔAOD; $\cos \llcorner \mathrm{OAD} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AD}} = 0{,}6$; т.е AH=$\frac{2}{0{,}6} = \frac{10}{3}$.

По т.Пифагора из $\Delta \mathrm{A_1AM}$ $\mathrm{A_1H} = \sqrt{\mathrm{A_1A}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{16 - \frac{100}{9}} = \frac{\sqrt{44}}{3}$.

$\mathrm{V} = 24 \cdot \frac{\sqrt{44}}{3} = 16\sqrt{11}$. Ответ: $V = 16\sqrt{11}$.