Всероссийский форум научной молодёжи «Шаг в будущее»

Решение планиметрических задач на построение с помощью шаблона острого угла и фиксированной окружности

Автор:

Варавко Антон Юрьевич,

МАОУ Юргинская средняя

общеобразовательная школа

9 класс

Научный руководитель:

Белозеров Владимир Иванович,

учитель математики

МАОУ Юргинская средняя

общеобразовательная школа

Российская Федерация, Тюменская область, с. Юргинское

2018 г.

Решение планиметрических задач на построение с помощью шаблона острого угла и фиксированной окружности

Варавко Антон Юрьевич

Российская Федерация, Тюменская область, с. Юргинское

МАОУ Юргинская средняя общеобразовательная школа, 9 класс

Аннотация

Цель работы – нахождение решения планиметрических задач на построение с помощью шаблона острого угла и фиксированной окружности.

При выполнении работы использован теоретический метод - изучение литературы, соответствующей теме работы. Также использованы методы: поиск решений стандартных планиметрических задач на построение с помощью шаблона острого угла и фиксированной окружности;составление и решение творческих задач на построение.

В ходе выполнения работы с помощью шаблона острого угла и фиксированной окружности были решены следующие планиметрические задачи на построение:

построение центра данной окружности;

построение прямой, касательной к окружности, которая параллельна данной прямой;

откладывание отрезка, равного данному отрезку, от начала заданного луча;

откладывание угла, равного данному углу, от данного луча в заданную полуплоскость;

построение биссектрисы угла;

построение треугольника по двум сторонам и углу между ними;

построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам.

Выполнено доказательство найденных решений.

Также нами был составлен сборник задач на построение, при решении которых используется шаблон острого угла.

Вывод: цель, которая была поставлена в работе, достигнута.

Решение планиметрических задач на построение с помощью шаблона острого угла и фиксированной окружности

Варавко Антон Юрьевич

Российская Федерация, Тюменская область, с. Юргинское

МАОУ Юргинская средняя общеобразовательная школа, 9 класс

Научная статья

При анализе литературы и поиске информации по теме нашей предыдущей работы было найдено всего три задачи №63, №65 и №83 из источника [1]. Формулировки задач на построение связаны с использованием шаблона острого угла (см. формулировки в приложении 1). При выполнении новой работы нам встретилось использование окружности и острого угла, величина которого равна $30^0, 45^0$ или 60^0(см. источники[2], [3]). Мы же используем жёсткий шаблон произвольного острого угла. При выполнении предыдущей работы (источник [4]) нами было замечено, что с помощью одного шаблона острого угла невозможно решить многие задачи на построение. Мы стали рассматривать различные чертёжные инструменты вместе с шаблоном острого угла и без него. Рассмотрели использование линейки с параллельными краями [5]. Вместе с шаблоном острого угла мы применили использование линейки с параллельными краями. При выполнении построения учитываем, что ограничений на размеры инструментов у нас нет, они являются бесконечными. В источнике [5] рассмотрены аксиомы построения с помощью циркуля и линейки. Будем считать, что аксиома шаблона острого угла позволяет выполнить все построения, которые можно выполнить с помощью линейки и дополнительно построить угол, градусная мера которого равна градусной мере шаблона острого угла, отложив этот угол в любую из полуплоскостей от данной прямой. Определим, что критерием эффективности использования чертёжного инструмент или набора чертёжных инструментов является разрешимость выполнения стандартных планиметрических задач на построение из школьного учебника [6]. В список стандартных планиметрических задач на построение мы включили следующие задачи: 1) откладывание отрезка, равного данному от начала заданного луча; 2) откладывание угла, равного данному, от данного луча в заданную полуплоскость; 3) деление отрезка пополам; 4) построение биссектрисы угла; 5) построение прямой, перпендикулярной данной прямой, и проходящей через точку, лежащую на данной прямой;6) построение прямой, перпендикулярной данной прямой, и проходящей через точку, не лежащую на данной прямой; 7) построение прямой, параллельной данной прямой, и проходящей через точку, не лежащую на данной прямой; 8) деление отрезка на n равных частей; 9) построение треугольника по двум сторонам и углу между ними; 10) построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам; 11) построение треугольника по трём сторонам. Результаты этого этапа работы мы оформили в виде таблицы№1, в которой знаком «+» мы отмечаем, что задача имеет решение; знаком «$\pm$», что задача имеет частное решение; знаком «-», что решение нами не найдено.

Таблица №1

задача	Линейка с параллельными краями	Шаблон острого угла	Шаблон острого угла и линейка с параллельными краями
Откладывание отрезка, равного данному, от начала заданного луча	±	±	±
Откладывание угла, равного данному, от данного луча в заданную полуплоскость	±	±	±
Деление отрезка пополам	±	+	+
Построение биссектрисы угла	+	-	+
Построение прямой, перпендикулярной данной прямой, и проходящей через точку, лежащую на данной прямой	+	+	+
Построение прямой, перпендикулярной данной прямой, и проходящей через точку, не лежащую на данной прямой	+	+	+
Построение прямой, параллельной данной прямой, и проходящей через точку, не лежащую на данной прямой	+	+	+
Деление отрезка на n равных частей	+	+	+
Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними	-	-	-
Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам	-	±	±
Построение треугольника по трём сторонам	-	-	-

Решения задач с использованием двусторонней линейки рассмотрены в источнике [5]. Решения задач с использованием шаблона острого угла рассмотрены в источнике [4]. Использование обоих инструментов вместе позволяет увеличить число решённых задач. Частное решение некоторых задач и отсутствие решения у других задач связано с тем, что использование линейки и шаблона острого угла не позволяет делать поворот на произвольный угол на плоскости с помощью этих инструментов. Равные отрезки можно построить только с использованием параллельного переноса. Т.е. чтобы данные задачи были разрешимы, нужно изменить набор чертёжных инструментов. Мы решили попробовать использовать жёсткий шаблон и фиксированную окружность. Под фиксированной окружностью мы принимаем неподвижную окружность произвольного радиуса, расположенную в плоскости выполняемого построения. В каждом построении используется своя фиксированная окружность. Ниже предложены решения задач 1, 2, 4, 9, 10, которые не решены с помощью шаблона острого угла или имеют частное решение. Прежде, чем решить эти задачи нам необходимо уметь строить центр окружности, если он не указан и проводить касательные к окружности, которые параллельны данной прямой. Будем считать эти задачи ключевыми. Ниже приведено решение этих задач.

К1**.** Построить центр данной окружности, если он не указан.

Дано: окружность ω.

Построить центр окружности ω.

Решение:

1. Провести отрезок AB - произвольную хорду окружности ω.

2. Построить серединный перпендикуляр к отрезку AB. Он пересечёт окружность ω в точках M и N. Рассмотрим хорду MN.

3. Определим точку O - середину хорды MN. O – центр окружности ω.

Доказательство: Т.к. все точки, равноудалённые от концов отрезка AB, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то центр окружности ω - точка O лежит на нём. Следовательно, точка O лежит на хорде MN. Таким образом, хорда MN является диаметром окружности. Середина диаметра является центром окружности, т.е. O – центр окружности ω, ч. т. д.

К2**.**Дано: прямаяAB, окружность ω(O,r).

Построить прямую CD||AB так, что прямая CD является касательной к окружности ω(O,r).

Решение:
Опустим из точки O перпендикуляр на прямую AB. Основанием перпендикуляра является точка M. Перпендикуляр OM пересечёт окружность ω(O,r) в точке N. Через точку N проведём прямую CD||AB. CD - искомая прямая (см. рис.1).

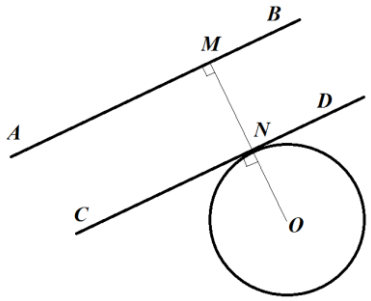

рис.1

Доказательство: NO – радиус окружности ω(O,r). Т.к. CD||AB, то CD⊥MO. Т.е. CD⊥NO. Если прямая перпендикулярна радиусу окружности и проходит через конец этого радиуса, то она является касательной к этой окружности. Т.е. прямая CD является касательной к окружности ω(O,r), ч.т.д.

Анализ: Задача имеет 2 решения. Можно провести 2 касательные, удовлетворяющие условию задания. Одна из касательных будет проходить через диаметрально противоположную точку K по отношению к точке N(см.рис.2).

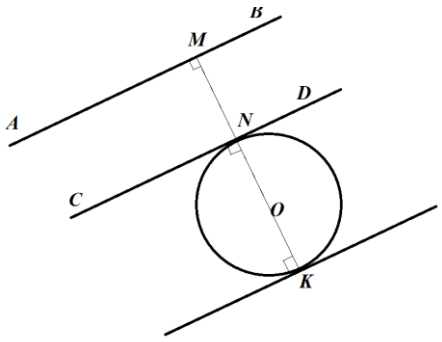

рис.2

Задача 1. Дано: отрезок AB, луч CD, окружность ω(O,r).

Построить на луче CD отрезок CK = AB.

План построения: Рассмотрим общий случай, когда отрезок AB и луч CD не параллельны.
1. Построить прямую a, которая параллельна отрезку AB и является касательной к окружности ω(O,r). Обозначим точку касания через M.
2. Построить прямую b, которая параллельна лучу CD и является касательной к окружности ω(O,r). Обозначим точку касания через P.
3. Обозначим точку пересечения прямых a и b через N. Проведём луч NO.
4. Строим на луче NM отрезок NT = AB.
5. Через точку T проведём прямую $l \perp NO$. Прямая l пересечёт прямую b в точке F. NF = NT.
6. На луче CD откладываем отрезок CK=NF=AB(см.рис.3).

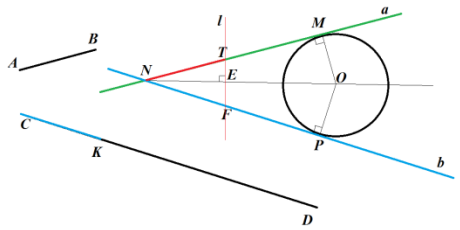

рис.3

Доказательство: По построению отрезок NT = AB. По построению окружность ω(O,r) вписана в ∠MNP. Т.е. луч NO - биссектриса угла MNP. Обозначим точку пересечения лучаNO с прямой l через E. ΔNTE=ΔNFE по 2-му признаку равенства треугольников. Следовательно, NF = NT. По построению CK=NF. Т.е. CK=AB, ч.т.д.

Анализ. Задача всегда имеет единственное решение. Если отрезок AB и луч CD параллельны, то окружность для выполнения построения не требуется.

Задача 2. Дано: ∠BAC, луч DF, окружность ω(O,r).

Построить ∠KDF=∠BAC так, что точка K лежит в заданной полуплоскости относительно прямой DF.

План построения: 1. На окружности ω(O,r) рассмотрим точку P. Через точку P провести прямыеа и b так, что a||AB и b||AC.
2. Обозначим точку пересечения прямой a и окружности ω(O,r) через T. Обозначим точку пересечения прямой b и окружности ω(O,r) через N.
3. Через точку N проведём прямую l || DF. Обозначим точку пересечения прямой l и окружности ω(O,r) через M.
4. Проведём луч MT.
5. Проведём луч DK||MT.
∠KDF – искомый (см. рис.4).

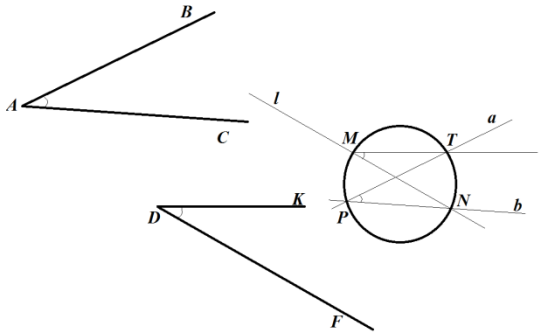

рис.4

Доказательство: ∠TPN=∠BAC, как углы с сонаправленными сторонами. ∠TPN=∠TMN, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. ∠TMN=∠KDF,как углы с сонаправленными сторонами. Значит ∠KDF=∠BAC, ч.т.д.

Анализ: Задача имеет единственное решение.Если точка K лежит в другой полуплоскости относительно луча DF, то в 3-м пункте нужно провести прямую l через точку T. Затем нужно провести луч MN (см.рис.5).

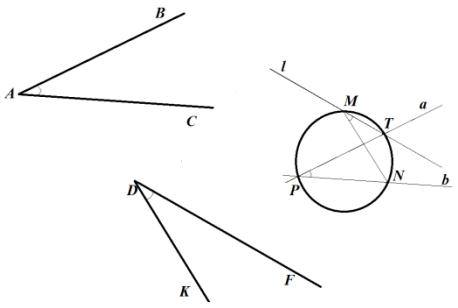

рис.5

Задача 4. Дано: ∠BAC, окружность ω(O,r).

Построить луч AD - биссектрису ∠BAC.

План построения: Рассмотрим общий случай, когда отрезок AB и луч CD не параллельны.
1. Построить прямую OK$\perp AB$. Обозначим точку пересечения прямой OK и окружности ω(O,r) через M.
2. Построить прямую OT$\perp AC$. Обозначим точку пересечения прямой OT и окружности ω(O,r) через N.
3. Через точку M проведём прямую a|| AB.
4. Через точку N проведём прямую b|| AC.
5. Обозначим точку пересечения прямыха и b через F.
6. Проведём луч FO.
7. Проведём луч AD||FO.
Луч AD – биссектриса ∠BAC (см. рис.6).

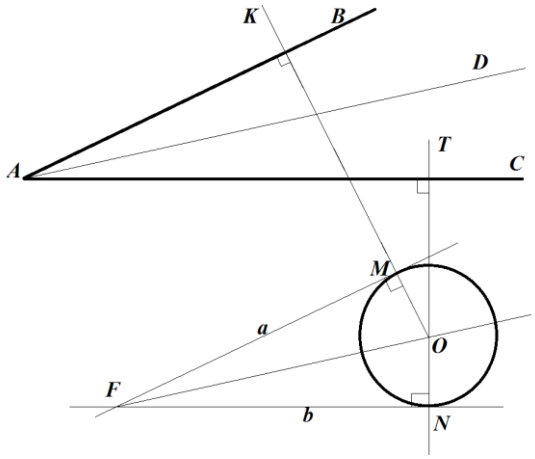

рис.6

Доказательство: ΔFMO=ΔFNO, как прямоугольные по гипотенузе и катету, т.е. луч FO является биссектрисой ∠MFN. ∠BAD=∠MFO, ∠DAC=∠OFN как углы с сонаправленными сторонами. Значит ∠BAD=∠DAC. Следовательно, луч AD – биссектриса ∠BAC, ч.т.д.

Задача 9.

Дано: отрезок a, отрезок b, ∠DMN.

Построить ΔABC так, что AB=a, AC=b, ∠BAC=∠DMN.

План построения. Построить ∠KAT=∠DMN(смотри задачу 2).

2. На луче AK отложить отрезок AB=a (смотри задачу 1).

3. На луче AT отложить отрезок AC=b (смотри задачу 1).

4. Построить отрезок BC.

ΔABC – искомый.

Доказательство: ΔABC является искомым по 1-му признаку равенства треугольников.

Задача 10.

Дано: отрезок a, ∠KTF, ∠DMN.

Построить ΔABC так, что AB=a, ∠CAB=∠DMN, ∠CBA=∠KTF.

План построения.

1. Построить отрезок AB=a .

2. В одну полуплоскость от прямойAB откладываем углы ∠LAB=∠DMN, ∠SBA=∠KTF. (смотри задачу 2).

3. Точку пересечения лучей AL и BS обозначить через C.

ΔABC – искомый. Доказательство: ΔABC является искомым по 2-му признаку равенства треугольников.

Для сравнения эффективности использования шаблона угла и фиксированной окружности рассмотрим таблицу №2.

Таблица №2

задача	Линейка с параллельными краями	Шаблон острого угла	Шаблон острого угла и линейка с параллельными краями	Шаблон острого угла и шаблон окружности
Откладывание отрезка, равного данному, от начала заданного луча	±	±	±	+
Откладывание угла, равного данному, от данного луча в заданную полуплоскость	±	±	±	+
Деление отрезка пополам	+	+	+	+
Построение биссектрисы угла	+	-	+	+
Построение прямой, перпендикулярной данной прямой, и проходящей через точку, лежащую на данной прямой	+	+	+	+
Построение прямой, перпендикулярной данной прямой, и проходящей через точку, не лежащую на данной прямой	+	+	+	+
Построение прямой, параллельной данной прямой, и проходящей через точку, не лежащую на данной прямой	+	+	+	+
Деление отрезка на n равных частей	+	+	+	+
Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними	-	-	-	+
Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам	-	±	±	+
Построение треугольника по трём сторонам	-	-	-	-

Нами составлен сборник задач (см. приложение 2). Задачи в сборнике разделены на 4 части. В 1-й части рассмотрены стандартные задачи из источника [1]. Во 2-й части «Деление плоских фигур на равные фигуры, подобные данным, с помощью шаблона острого угла»рассмотрены авторские задачи.В 3-й части«Задачи на построение, в которых используется шаблон острого угла, на одной стороне которого выделен отрезок фиксированной длины» такжерассмотрены авторские задачи. В 4-й части «Задачи на построение с использованием шаблона острого угла и данной окружности» часть задач являются авторскими, часть задач найдена в источниках [2], [3]. Для некоторых задач из сборника оформлены их решения.

Вывод: Использование фиксированной окружности вместе с шаблоном острого угла позволяет выполнить решение 10 из 11 стандартных планиметрических задач на построение из школьного учебника, т.е. из рассмотренных вариантов чертёжных инструментов шаблон острого угла вместе с фиксированной окружностью является самым эффективным. Также нами составлен сборник задач на построение с использованием различных чертёжных инструментов, т.е. цель работы достигнута.

Литература

1. http://www.litsoch.ru/referats/read/199472/
2. https://nsportal.ru/ap/library/nauchno-tekhnicheskoe-tvorchestvo/2017/03/13/postroeniya-s-pomoshchyu-ravnostoronnego
3. https://lektsii.org/14-15650.html
4. http://urga.urgaobr.ru/wp-content/uploads/2018/09/Деление-отрезка-на-равные-части-с-помощью-шаблона-острого-угла.pdf
5. https://infourok.ru/issledovatelskaya-rabota-na-temu-geometricheskie-postroeniya-s-pomoschyu-dvustoronney-lineyki-1266361.html
6. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных организаций/[Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др.]. – М.: Просвещение, 2013. – 383 с.:ил. – ISBN 978-5-09-024881-5

Приложение 1

63. Опустите из данной точки перпендикуляр на данную прямую с помощью шаблона острого угла.

65. Разделите данный отрезок на 8 равных частей с помощью шаблона острого угла.

83. Как с помощью шаблона острого угла построить перпендикуляр к данной прямой в данной точке?

Приложение 2

Сборник задач

1. Стандартные задачи.

1.1 Разделить отрезок с помощью шаблона острого угла на: а) 2 равных отрезка; б) 4 равных отрезка; в) 16 равных отрезков.

1.2. Провестипрямую, перпендикулярную к данной прямой, проходящую через точку, лежащую на данной прямой.

1.3. Провести к данной прямой перпендикулярную прямую, проходящую через точку, не лежащую на данной прямой.

2. Деление плоских фигур на равные фигуры, подобные данным, с помощью шаблона острого угла.

2.1. Разделить треугольник: а) на 9 равных треугольников; б) n^2равных треугольников.

2.2. Разделить параллелограмм: а) на 25 равных параллелограммов; б)n^2равных параллелограммов.

3. Задачи на построение, в которых используется шаблон острого угла, на одной стороне которого выделен отрезок фиксированной длины.

3.1. Разделить отрезок на n равных частей с помощью шаблона острого угла, на одной стороне которого выделен отрезок фиксированной длины.

3.2. Используя шаблон острого угла, на одной стороне которого выделен отрезок фиксированной длины, построить биссектрису данного угла.

3.3. Построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{2}$, если в качестве отрезка, длина которого равна 1 взять отрезок фиксированной длины.

3.4. Построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{3}$, если в качестве отрезка, длина которого равна 1 взять отрезок фиксированной длины.

3.5. Построить треугольник, подобный данному, площадь которого в 2 раза меньше площади данного треугольника.

3.6. Построить параллелограмм, подобный данному, площадь которого в 3 раза меньше площади данного параллелограмма.

4. Задачи на построение с использованием шаблона острого угла и данной окружности.

4.1. Построить центр данной окружности, если он не указан.

4.2. На данной окружности лежит точка А. Построить диаметр АВ окружности при условии, что центр окружности не указан.

4.3. Построить квадрат, вписанный в данную окружность.

4.4. Построить правильный 16-угольник, вписанный в данную окружность.

4.5. Построить правильный 6-угольник, вписанный в данную окружность.

4.6. Построить правильный 12-угольник, вписанный в данную окружность.

4.7. Построить правильный треугольник, вписанный в данную окружность.

4.8. Построить прямоугольник, вписанный в данную окружность, угол между диагоналями которого равен половине градусной меры шаблона.

4.9. Построить квадрат, описанный около данной окружности, если известна точка касания одной из сторон квадрата с окружностью.

4.10. Построить треугольник, описанный около данной окружности, если известны точки касания сторон треугольника с окружностью.

4.11. Построить правильный треугольник, описанный около данной окружности, если известна точка касания одной из сторон треугольника с окружностью.

4.12. Построить правильный 6-угольник, описанный около данной окружности, если известна точка касания одной из сторон 6-угольника с окружностью.

4.13. Построить равнобедренную трапецию, острый угол которой равен шаблону, описанную около окружности, если дана точка касания боковой стороны трапеции с окружностью.

4.14. Построить равнобедренную трапецию, острый угол которой равен шаблону, описанную около окружности, если дана точка касания одного из оснований трапеции с окружностью.

4.15. Построить ромб, острый угол которого равен шаблону, описанный около окружности, если дана точка касания стороны ромба с окружностью.

Решения отдельных задач из сборника

1.1а Дано: отрезок AB ($см. рис.$ 1).

Построить с помощью шаблона острого угла точку О – середину отрезка AB.

Решение:

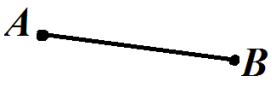

рис.1

1. Отложить от прямой AB в верхнюю полуплоскость с помощью шаблона два угла ∠CAB и ∠DBA, так чтобы лучи ACBDпересеклись в точке M.
Отложить от прямой AB в нижнюю полуплоскость с помощью шаблона два угла ∠KAB и ∠PBA, так чтобы лучи BPи AKпересеклись в точкеN($см. рис.$ 2).

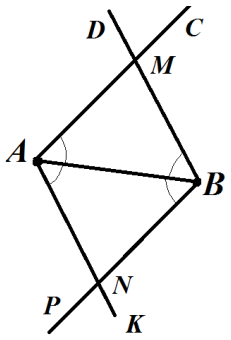

рис.2

2. Построить прямую MN.
3. ПрямаяMN пересечёт отрезок AB в точке O.O– середина отрезка AB($см. рис.$ 3).
Доказательство:ΔAMB и ΔANB - равнобедренные и равны по 2-му признаку равенства треугольников, т.е.AM=MB=AN=NB. Значит четырёхугольник AMBN является ромбом, диагонали которого пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, точка O– середина отрезка AB, ч.т.д.

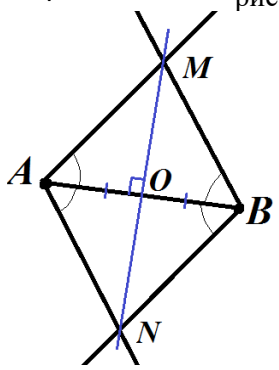

рис.3

1.2. Дано: прямая a, $A \in a$($см. рис.$ 4).

Построить с помощью шаблона острого угла прямую $b \perp a,\ A \in b$.

Решение:

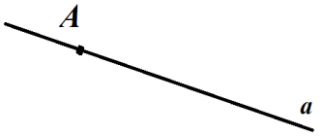

рис.4

1. Отметить точки B,C на прямой a($см. рис.$ 5).

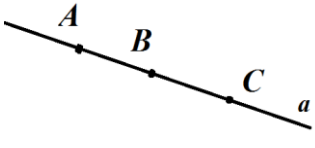

рис.5

2. Построить прямую MN - серединный перпендикуляр к отрезку BC(см. задачу 1.1а).
3. Через точкуA провести прямую $b||MN$(алгоритм 1 из работы) ($см. рис.$ 6).
Доказательство: Из доказательства предыдущей задачи следует, что четырёхугольник BMCN является ромбом, диагонали которого перпендикулярны друг другу. Значит MN⊥ a, но т. к. $b||MN$, то $b \perp a$, ч. т. д.

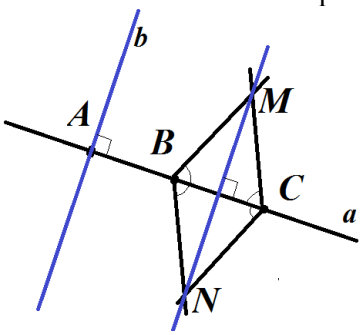

рис.6

2.1а. Дано: ΔABC.

Разделить ΔABC на 9 равных треугольников с помощью шаблона угла.

Решение:

1. Разделить сторону AB на 3 равных отрезка точками C_1, C_2 (см. алгоритм 3 из работы [4]).

2. Разделить сторону AC на 3 равных отрезка точками B_1, B_2(см. алгоритм 3 из работы[4]).

3. Разделить сторону BC на 3 равных отрезка точками A_1, A_2 (см. алгоритм 3 из работы[4]).

4. Провести отрезки$A_1B_2, A_2B_1, A_1C_2, A_2C_1, B_1C_2, B_2C_1$. Они разобьют ΔABC на 9 равных треугольников (*см.рис.*7)

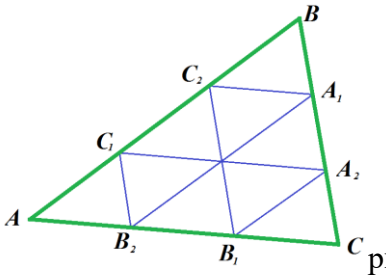

рис.7

3.1. Разделить отрезок на n равных частей с помощью шаблона острого угла, на одной стороне которого выделен отрезок фиксированной длины.

Решение:
1. Используя шаблон острого угла, построить углы CAB и BAD так, что лучи AC и BDпротивоположнонаправлены (*см.рис.*8).

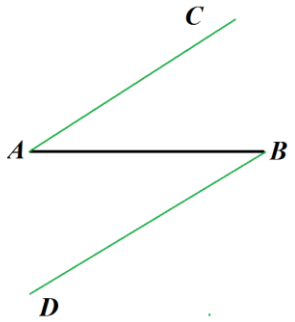

рис.8

2. С помощью отрезка фиксированной длины отложим на луче ACn равных отрезков $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}A_n$.
3. Точно таким же способом откладываем на луче BDn равных отрезков $BB_1, B_1B_2, \dots, B_{n-2}B_{n-1}, B_{n-1}B_n$.
4. Проводим прямые$A_1B_{n-1}, A_2B_{n-2} \dots, A_{n-1}B_1$ с помощью шаблона острого угла. Прямые $A_1B_{n-1}, A_2B_{n-2} \dots, A_{n-1}B_1$пересекут отрезок AB в точках$N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$, которые делят его на n равных отрезков (*см.рис.*9).

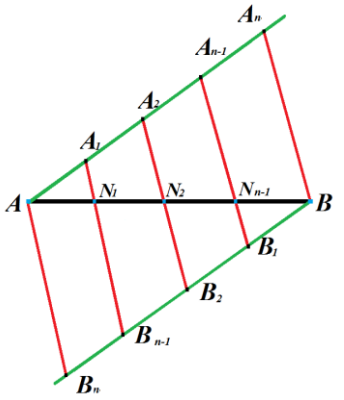

Рис.9

Доказательство: Т.к. угол CAB равен углу ABD, и эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямыхAC, BD и секущей AB, то AC||BD. Т.к. по построению $AA_1 = B_{n-1}B_n$, то четырёхугольник $AA_1B_{n-1}B_n$ является параллелограммом, т.е. $AB_n||A_1B_{n-1}$. Аналогично доказывается, что все прямые $A_1B_{n-1}, A_2B_{n-2} \dots, A_{n-1}B_1$ параллельны друг другу. Следовательно, по теореме Фалеса $AN_1 = N_1N_2 = \dots = N_{n-1}B$, ч.т.д.

3.4. Построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{3}$, если в качестве отрезка, длина которого равна 1 взять отрезок фиксированной длины.

Решение: 1. Построить $\angle A = 90^0$.

2. На одной стороне угла отложить отрезок $AB = 1$.На другой стороне угла отложить отрезок $AC = 1$. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{2}$.

3. Через точку С провести прямую $c \perp BC$. На прямой отложить отрезок $CD = 1$.По теореме Пифагора $BD = \sqrt{3}$.

3.6. Построить параллелограмм, подобный данному, площадь которого в 3 раза меньше площади данного параллелограмма.

Дано: параллелограмм *ABCD*.

Построить параллелограмм $AB_1C_1D_1$, подобный параллелограмму *ABCD*так, что$\frac{S_{ABCD}}{S_{AB_1C_1D_1}} = 3$.

Решение: 1. Т.к.$\frac{S_{ABCD}}{S_{AB_1C_1D_1}} = 3$, то коэффициент подобия $k = \sqrt{3}$.

2. Проведём луч AM. Отложим на нём отрезки $AM_1 = 1, AM_2 = \sqrt{3}$(см. задачу 3.4). Проведём прямую BM_2. Через точку M_1проведём прямую $M_1B_1 || BM_2$(см. алгоритм 1 из работы), так что $B_1 \in AB$.

3. Проведём луч AN. Отложим на нём отрезки $AN_1 = 1, AN_2 = \sqrt{3}$(см. задачу 3.4). Проведём прямую DN_2. Через точку N_1проведём прямую $N_1D_1 || DN_2$(см. алгоритм 1 из работы[4]), так что $D_1 \in AD$.

4. Через точку B_1 проведём прямую, параллельную прямой*BC*, а через точку D_1 проведём прямую, параллельную прямой *DC*. Обозначим точку пересечения прямых через C_1. Таким образом мы построили параллелограмм $AB_1C_1D_1$, подобный параллелограмму *ABCD*так, что

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{AB_1C_1D_1}} = 3(см. рис. 10).$$

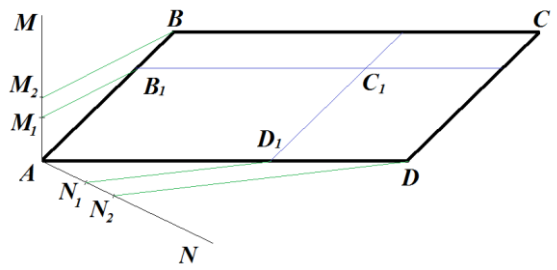

рис.10

4.1. Построить центр данной окружности, если он не указан.

Дано: окружность ω.

Построить центр окружности ω.

Решение:

1. Провести отрезок АВ - произвольную хорду окружности ω.

2. Построить серединный перпендикуляр к отрезку AB. Он пересечёт окружность ω в точках M и N. Хорда MN является диаметром окружности.

3. Определим точку O - середину диаметра MN. O – центр окружности ω.

Доказательство: Т.к. все точки, равноудалённые от концов отрезка AB, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то центр окружности ω - точка O лежит на нём. Следовательно, точка O лежит на хорде MN. Таким образом, хорда MN является диаметром окружности. Середина диаметра является центром окружности, т.е. O – центр окружности ω, ч. т. д.

4.2. На данной окружности лежит точка A. Построить диаметр AB окружности при условии, что центр окружности не указан.

Дано: окружность $\omega, A \in \omega$.

Построить диаметр AB окружности ω.

Решение: 1. Определим точку O – центр окружности ω(см. задачу 4.1).

2. Проводим хорду AB через точку O. Хорда AB является диаметром окружности ω.

4.5. Построить правильный 6-угольник, вписанный в данную окружность.

Дано: окружность ω.

Построить правильный 6-угольник, вписанный в окружность ω.

Решение:1. Построить диаметр AB окружности ω(см. задачу 4.2).

2. Построить серединный перпендикуляр к отрезку AO, где O – центр окружности ω. Серединный перпендикуляр пересечёт окружность ω в точках C и D.

3. Построить серединный перпендикуляр к отрезку BO. Серединный перпендикуляр пересечёт окружность ω в точках M и N. 6-угольник ACMBND–правильный (*см.рис.*11). Доказательство: Из доказательства задачи 1.1 следует, что четырёхугольник ACOD является ромбом. Т.к. AO=CO=DO, то ΔACO и ΔADO - равносторонние. Следовательно, ∠ CAD=120^0. Аналогично∠ MBN=120^0. Т.к. трапеции ACMB и ADNB являются равнобедренными, то все углы построенного шестиугольника равны по 120^0 . Т.к. ΔCON, ΔDON - равносторонние, то все стороны построенного шестиугольника равны друг другу. Следовательно, 6-угольник ACMBND–правильный, ч.т.д.

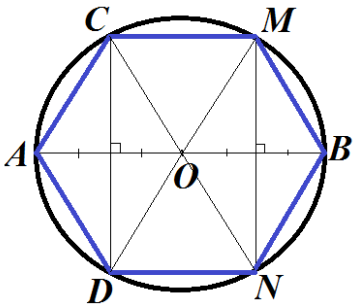

рис.11

4.10. Построить треугольник, описанный около данной окружности, если известны точки касания сторон треугольника с окружностью.

Дано: окружность ω, точки M, N, K – точки касания сторон ΔABC с ω.

Построить ΔABC.

Решение:

1. Построить диаметры MM_1, NN_1, KK_1 (см. задачу 4.2) (*см. рис.* 12).

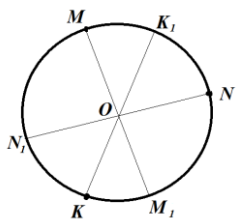

рис.12

2. Через точку M провести прямую $m \perp MM_1$.
3. Через точку N провести прямую $n \perp NN_1$.
4. Через точку K провести прямую $k \perp KK_1$.
(Для шагов 2-4 используем задачу 1.2) (*см.рис.* 13).

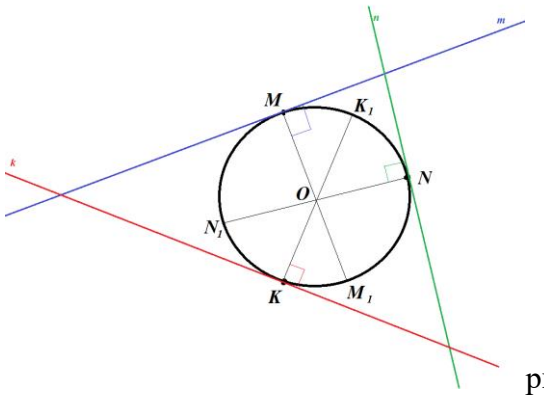

рис.13

5. Обозначить точку пересечения прямых m и n через B, прямых m и k через A, прямых n и k через C. (*см. рис*14). ΔABC – искомый.

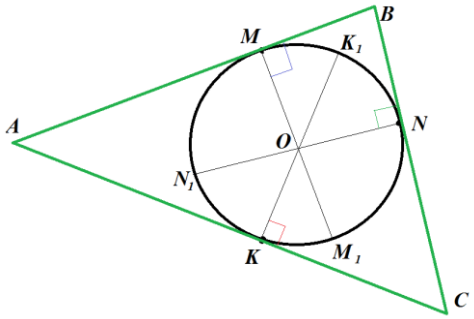

рис.14

4.13. Построить равнобедренную трапецию, острый угол которой равен шаблону, описанную около окружности, если дана точка касания боковой стороны трапеции с окружностью.

Дано: окружность $\omega, K \in \omega$.

Построить равнобедренную трапецию*ABCD* с основаниями*AD*и *BC* и $\angle A$, равным шаблону, описанную около ω так, что $K \in AB$.
Решение:1. Построить точку O - центр данной окружности(см.задачу 4.1).
2. Построить диаметр KP.
3. Через точку Kпровести прямую $c \perp KP$.
4. Отложить от прямой с$\angle PKT =$

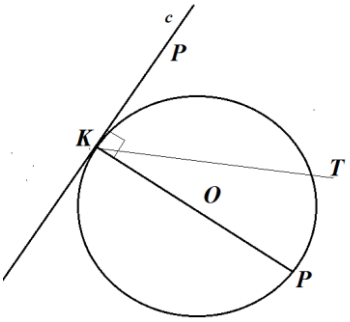

рис.15

$\angle A$, где $T \in \omega$
(*см.рис*.15).
5. Построить диаметр MNтак, что $MN \perp KT$.
6. Через точки M иNпровести прямые BM($B \in c$) и AN ($A \in c$), параллельные KT(*см.рис*.16).

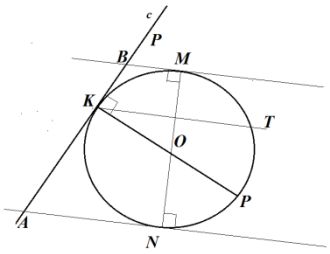

рис.16

7. Приложив шаблон одной стороной к прямойAN,а 2-я сторона шаблона при этом должна пересекать прямую c, и перемещаем его вдоль AN так, чтобы вторая сторона шаблона прошла через точку T.
8. Точку, в которой остановилась вершина шаблона, обозначим через D, а точку пересечения 2-й стороны шаблона с прямой BMобозначим через C. Трапеция*ABCD*- искомая (*см.рис*.17).

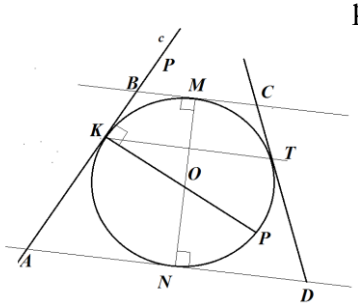

рис.17

4.15. Построить ромб, острый угол которого равен шаблону, описанный около окружности, если дана точка касания стороны ромба с окружностью.

Дано: окружность $\omega, A \in \omega$.

Построить ромб MNPK, описанный около ω, при условии, что точка A - точка касания стороны ромба с ω.

Решение:

1. Построить диаметр AB(см. задачу 4.2)(*см.рис*. 18).

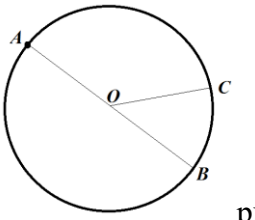

рис.18

2. От диаметра AB отложить $\angle COB$, где O – центр окружностиω, $C \in \omega$. $\angle COB$ равен шаблону угла.
3. Построить диаметр CD.
4. Через точки A, B,C иDпровести прямые – касательные к окружности ω (*см.рис*.19).
5. Обозначить точки пересечения касательных черезM,N,P,K. ЧетырёхугольникMNPK – искомый ромб(*см.рис*.20).

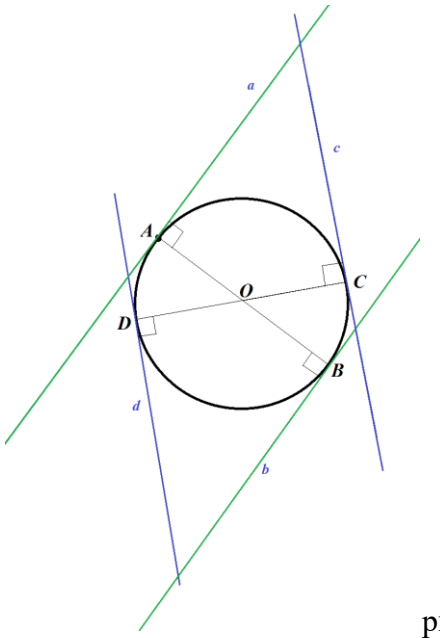

рис.19

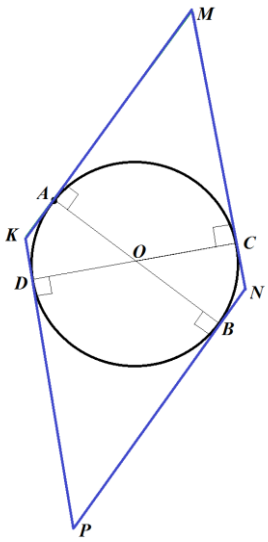

рис.20